Dynamique des croyances

Sébastien Konieczny

konieczny@cril.univ-artois.fr

CRIL-CNRS

Université d'Artois - Lens

Préliminaires - Relations

Une relation (binaire) sur un ensemble E est un sous-ensemble de $E \times E$.
Une relation $\mathcal{R}$, définie sur $E \times E$, est dite :

- ▷ **réflexive** si pour tout x de E, $x\mathcal{R}x$.
- ▷ **transitive** si pour tout x, y, z de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.
- ▷ **totale** si pour tout x, y de E, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.
- ▷ **symétrique** si pour tout x, y de E, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$.
- ▷ **anti-symétrique** si pour tout x, y de E, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$.

- ▷ Une relation qui n'est pas totale est dite **partielle**.
- ▷ Un **pré-ordre** est une relation réflexive et transitive sur $E \times E$.
- ▷ Une **relation d'équivalence** est une relation réflexive, transitive et symétrique sur $E \times E$.
- ▷ Un **ordre** est une relation réflexive, anti-symétrique et transitive sur $E \times E$.
  Un **ordre strict** est une relation irréflexive et transitive sur $E \times E$.

Préliminaires - Relations

Soit un pré-ordre $\leq$ défini sur $E \times E$:

- ▷ On définit l'ordre strict $<$ associé, comme $x < y$ si $x \leq y$ et $y \not\leq x$.
- ▷ On définit également la relation d'équivalence $\simeq$ induite par $\leq$, comme $x \simeq y$ si $x \leq y$ et $y \leq x$.

Soient un pré-ordre $\leq$ défini sur $E \times E$ et E' un sous-ensemble de E, on note $\min(E', \leq)$ l'ensemble des éléments minimaux de E' pour $\leq$, ie

$$\min(E', \leq) = \{x \in E' : \nexists y \in E' y < x\}$$

Préliminaires - Conséquences

Soit $\mathcal{L}$ un langage comprenant un ensemble d'atomes $\mathcal{A} = \{A, B, C, \ldots\}$ et les connecteurs usuels $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$. $\perp$ dénote la contradiction et $\top$ la tautologie.

Définition. Une **opération de conséquence** [Tarski 1930] sur un langage $\mathcal{L}$ est une fonction $Cn : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$ vérifiant les conditions :

- $K \subseteq Cn(K)$ **(inclusion)**
- Si $K \subseteq K'$, alors $Cn(K) \subseteq Cn(K')$ **(monotonie)**
- $Cn(K) = Cn(Cn(K))$ **(idempotence)**

Nous supposerons également que :

- Cn contient les conséquences logiques classiques **(supraclassicalité)**
- Si $A \in Cn(K)$ alors il existe K' un sous-ensemble fini de K tel que $A \in Cn(K')$ **(compacité)**
- $B \in Cn(K \cup \{A\})$ si et seulement si $A \rightarrow B \in Cn(K)$ **(déduction)**

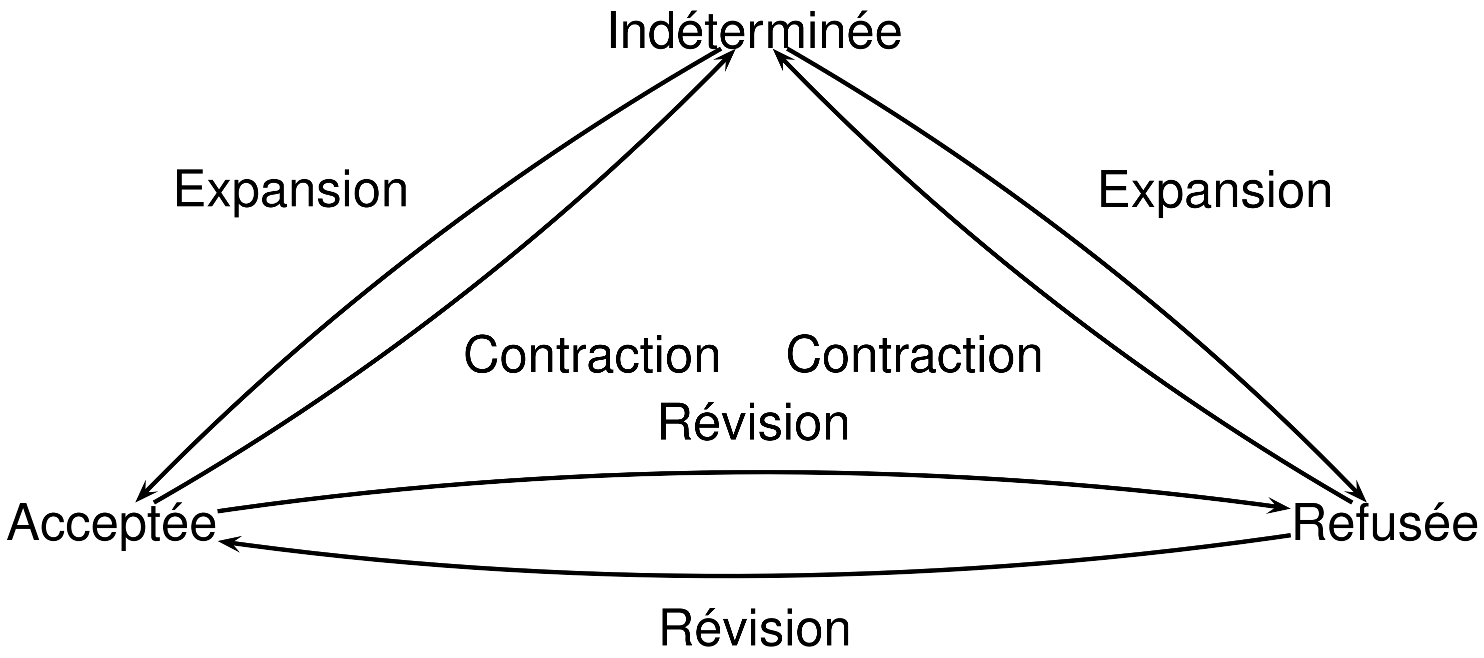
Préliminaires - Base de croyances

- On définit $K \vdash A$ comme une notation pour $A \in Cn(K)$.
- Une **base de croyances** K est un ensemble de propositions de $\mathcal{L}$.
- Une base de croyances est dite **close déductivement** (**Théorie**) si $K = Cn(K)$.
- On note $K_\perp$ la base de croyances triviale contenant toutes les formules de $\mathcal{L}$.

Attitudes epistémiques

Soient une base de croyances K représentant les croyances d'un agent, et une information A. Il y a trois attitudes possibles de K envers A :

- ▷ $A \in K$: A est **acceptée**
- ▷ $\neg A \in K$: A est **refusée**
- ▷ $A \notin K$ et $\neg A \notin K$: A est **indéterminée**



Révision

- ▷ Primauté de la nouvelle information
- ▷ Principe de cohérence
- ▷ Principe de changement minimal

Expansion

Un opérateur d'expansion $+$ est une fonction de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ vers $\mathcal{K}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(K+1) $K + A$ est une théorie **(clôture)**

(K+2) $A \in K + A$ **(succès)**

(K+3) $K \subseteq K + A$ **(inclusion)**

(K+4) Si $A \in K$, alors $K + A = K$ **(vacuité)**

(K+5) Si $K \subseteq H$, alors $K + A \subseteq H + A$ **(monotonie)**

(K+6) $K + A$ est la plus petite base de connaissance satisfaisant (K+1)-(K+5) **(minimalité)**

Conséquences :

- ▷ $K + A = K + B$ ssi $B \in K + A$ et $A \in K + B$
- ▷ $(K + A) + B = (K + B) + A$
- ▷ Si $\neg A \in K$, alors $K + A = K_{\perp}$

Expansion

Un opérateur d'expansion $+$ est une fonction de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ vers $\mathcal{K}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(K$+$1) $K + A$ est une théorie **(clôture)**

(K$+$2) $A \in K + A$ **(succès)**

(K$+$3) $K \subseteq K + A$ **(inclusion)**

(K$+$4) Si $A \in K$, alors $K + A = K$ **(vacuité)**

(K$+$5) Si $K \subseteq H$, alors $K + A \subseteq H + A$ **(monotonie)**

(K$+$6) $K + A$ est la plus petite base de croyances satisfaisant (K$+$1)-(K$+$5) **(minimalité)**

Théorème. La fonction d'expansion $+$ satisfait les postulats (K$+$1)-(K$+$6) ssi $K + A = Cn(K \cup A)$.

Révision

Un opérateur de révision $*$ est une fonction de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ vers $\mathcal{K}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(K*1) $K * A$ est une théorie **(clôture)**

(K*2) $A \in K * A$ **(succès)**

(K*3) $K * A \subseteq K + A$ **(inclusion)**

(K*4) Si $\neg A \notin K$, alors $K + A \subseteq K * A$ **(vacuité)**

(K*5) $K * A = K_\perp$ ssi $\vdash \neg A$ **(consistance)**

(K*6) Si $A \leftrightarrow B$, alors $K * A = K * B$ **(extensionalité)**

(K*7) $K * (A \wedge B) \subseteq (K * A) + B$ **(inclusion conjonctive)**

(K*8) Si $\neg B \notin K * A$, alors $(K * A) + B \subseteq K * (A \wedge B)$ **(vacuité conjonctive)**

Contraction

Un opérateur de contraction $\div$ est une fonction de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ vers $\mathcal{K}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- **(K÷1)** $K \div A$ est une théorie **(clôture)**
- **(K÷2)** $K \div A \subseteq K$ **(inclusion)**
- **(K÷3)** Si $A \notin K$, alors $K \div A = K$ **(vacuité)**
- **(K÷4)** Si $\nvdash A$, alors $A \notin K \div A$ **(succès)**
- **(K÷5)** Si $A \in K$, alors $K \subseteq (K \div A) + A$ **(restauration)**
- **(K÷6)** Si $A \leftrightarrow B$, alors $K \div A = K \div B$ **(préservation)**
- **(K÷7)** $(K \div A) \cap (K \div B) \subseteq K \div (A \wedge B)$ **(intersection)**
- **(K÷8)** Si $A \notin K \div (A \wedge B)$, alors $K \div (A \wedge B) \subseteq K \div A$ **(conjonction)**

Identités

▷ $K * A = (K \div \neg A) + A$ **(Identité de Levi)**

Théorème. Si l'opérateur de contraction $\div$ satisfait (K$\div$1)-(K$\div$4) et (K$\div$6) et l'opérateur d'expansion $+$ satisfait (K+1)-(K+6), alors l'opérateur de révision $*$ défini par l'identité de Levi satisfait (K*1)-(K*6). De plus, si (K$\div$7) est satisfait, alors (K*7) est satisfait pour la révision ainsi définie, et si (K$\div$8) est satisfait, alors (K*8) est satisfait pour la révision ainsi définie.
Remarque. Le postulat **recovery** (K$\div$5) n'est pas nécessaire pour ce résultat.

▷ $K \div A = K \cap (K * \neg A)$ **(Identité de Harper)**

Théorème. Si l'opérateur de révision $*$ satisfait (K*1)-(K*6), alors l'opérateur de contraction $\div$ définie par l'identité de Harper satisfait (K$\div$1)-(K$\div$6). De plus, si (K*7) est satisfait, alors (K$\div$7) est satisfait pour la contraction ainsi définie, et si (K*8) est satisfait, alors (K$\div$8) est satisfait pour la contraction ainsi définie.

Révision - Logique propositionnelle

Soient deux formules propositionnelles φ et μ. L'opérateur $\circ$ est un opérateur de révision s'il vérifie les postulats suivants :

(R1) $\varphi \circ \mu \vdash \mu$

(R2) Si $\varphi \wedge \mu$ est consistant alors $\varphi \circ \mu \equiv \varphi \wedge \mu$

(R3) Si μ est consistant alors $\varphi \circ \mu$ est consistant

(R4) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$ alors $\varphi_1 \circ \mu_1 \equiv \varphi_2 \circ \mu_2$

(R5) $(\varphi \circ \mu) \wedge \phi \vdash \varphi \circ (\mu \wedge \phi)$

(R6) Si $(\varphi \circ \mu) \wedge \phi$ est consistant alors $\varphi \circ (\mu \wedge \phi) \vdash (\varphi \circ \mu) \wedge \phi$

Soit un opérateur de révision $*$ sur des théories et $\circ$ un opérateur de révision sur des bases de croyances propositionnelles. Si $Cn(\varphi) = K$, on dit que l'opérateur $*$ correspond à l'opérateur $\circ$ si $K * A = Cn(\varphi \circ A)$.

Théorème. [Katsuno Mendelzon 1991] Soit un opérateur de révision $*$ et son opérateur $\circ$ correspondant. Alors $*$ satisfait les postulats $(K * 1) - (K * 8)$ si et seulement si $\circ$ vérifie les postulats $(R1) - (R6)$.

Théorèmes de représentation

- Définitions **constructives** d'opérateurs
- Méthodes naturelles :
  - Fonctions de contraction par intersection
  - Enracinements Epistémiques
  - Contraction sûre
  - Assignements fidèles - Systèmes de Sphères

Contraction par intersection totale

- Idée : Garder le maximum de formules de l'ancienne base

Définition. [Ensemble des sous-théories maximales de K n'impliquant pas A]
Soient une théorie K et une proposition A. $K \bot A$ est l'ensemble de tous les K' qui vérifient :

- $K' \subseteq K$
- $K' \nvdash A$
- Si $K' \subset K'' \subseteq K$ alors $K'' \vdash A$

Définition. [Contraction par intersection totale] La fonction de **contraction par intersection totale** (full meet contraction) $\div_f$ est définie comme

$$K \div_f A = \begin{cases} Cn(\bigcap(K \bot A)) & \text{si } K \bot A \text{ n'est pas vide, et} \\ K \div_f A = K & \text{sinon} \end{cases}$$

Contraction par intersection totale

- Si on effectue une contraction (par intersection totale) par A, le résultat est l'ensemble des formules de K qui sont conséquences logiques de $\neg A$.

Théorème. [Alchourrón Makinson 1982] Si une fonction de révision $*$ est définie à partir d'une fonction de contraction par intersection totale au moyen de l'identité de Levi, alors pour chaque proposition A telle que $\neg A \in K$, on a $K * A = Cn(A)$.

Contraction par intersection partielle

- Pour avoir un comportement moins drastique on ne va pas considérer l'ensemble de toutes les sous-théories maximales, mais seulement certaines d'entre elles.

Définition. [Fonction de sélection] Soit une théorie K, une **fonction de sélection** γ est une fonction qui associe à chaque proposition A l'ensemble $\gamma(K \perp A)$, qui est un sous-ensemble non vide de $K \perp A$ si celui-ci n'est pas vide et $\gamma(K \perp A) = \{K\}$ sinon.

Définition. [Contraction par intersection partielle] Une fonction de **contraction par intersection partielle** (partial meet contraction) $\div$ est définie comme

$$K \div A = Cn(\bigcap \gamma(K \perp A))$$

Contraction par intersection partielle

Deux cas limites :

- ▷ la fonction de sélection garde l'intégralité des sous-théories maximales
  - ▷ Contraction par intersection totale
- ▷ la fonction de sélection ne garde qu'une seule sous-théorie maximale
  - ▷ Contraction à choix maximal (maxichoice contraction)

Contraction par intersection partielle

Théorème. Soit un opérateur $\div$, $\div$ est une fonction de contraction par intersection partielle si et seulement si $\div$ satisfait les postulats (K$\div$1)-(K$\div$6).

Définition. Une fonction de sélection γ est **relationnelle** si et seulement si pour tout K il existe une relation $\leq$ sur K^2 telle que

$$\gamma(K \perp A) = \{K' \in K \perp A \mid K' \leq K'', \forall\, K'' \in K \perp A\}$$

Si $\leq$ est une relation transitive alors γ est dite **relationnelle transitive**.

Théorème. Soit un opérateur $\div$, $\div$ est une fonction de contraction par intersection partielle relationnelle transitive (transitively relational partial meet contraction function) si et seulement si $\div$ satisfait les postulats (K$\div$1)-(K$\div$8).

Théorème. Soit une fonction de contraction par intersection partielle $\div$, $\div$ est relationnelle transitive si et seulement si elle est transitive et totale.

Enracinements Epistémiques

- ▷ Idée : Garder les formules les plus fiables de l'ancienne base

Soient deux formules A et B, la notation $A \leq B$ signifie "B est au moins aussi enraciné que A". $\leq$ est un **enracinement épistémique** (epistemic entrenchment) s'il satisfait les propriétés suivantes [Gärdenfors 1988] :

(EE1) Si $A \leq B$ et $B \leq C$, alors $A \leq C$ **(transitivité)**

(EE2) Si $A \vdash B$, alors $A \leq B$ **(domination)**

(EE3) $A \leq A \wedge B$ ou $B \leq A \wedge B$ **(conjonction)**

(EE4) Si $K \neq K_{\perp}$, $A \notin K$ ssi $\forall B\ A \leq B$ **(minimalité)**

(EE5) Si $B \leq A\ \forall B$, alors $\vdash A$ **(maximalité)**

Théorème. Une fonction de contraction $\div$ satisfait $(K \div 1) - (K \div 8)$ si et seulement si il existe $\leq$ satisfaisant (EE1)-(EE5), où $B \leq A$ ssi $B \notin K \div A \wedge B$.

Théorème. Soit un enracinement épistémique $\leq$. L'opérateur $*$ défini par $B \in K * A$ ssi soit $(A \rightarrow \neg B) < (A \rightarrow B)$, soit $\vdash \neg A$ est un opérateur de révision AGM.

Contraction sûre

- Idée : Garder les formules de l'ancienne base que l'on ne peut pas blâmer d'impliquer l'information

Définition. Un ensemble K' est une **sous-théorie minimale** de K impliquant A si et seulement si

- $K' \subseteq K$
- $K' \vdash A$
- Si $K'' \subset K'$, alors $K'' \nvdash A$

Définition. Etant donnée une relation acyclique $<$ sur une théorie K, un élément B est en sécurité (safe) vis à vis de A si et seulement si B n'est pas un élément minimal (pour $<$) d'une sous-théorie minimale de K qui implique A. L'ensemble des éléments de K qui sont en sécurité vis à vis de A est noté K/A.

Définition. [Alchourrón Makinson 1985] La fonction de **contraction sûre** (safe contraction) d'une théorie K, étant donnée une hiérarchie $<$, est l'ensemble des conséquences de K/A, i.e. $K \div A = Cn(K/A)$.

Contraction sûre

Théorème. Une fonction de contraction sûre satisfait les postulats (K÷1)-(K÷6).

- On dit que $<$ **continue $\vdash$ vers le haut** (continues up) sur la théorie K si et seulement si pour tout $A, B, C \in K$, si $A < B$ et $B \vdash C$, alors $A < C$.
- On dit que $<$ **continue $\vdash$ vers le bas** (continues down) sur la théorie K si et seulement si pour tout $A, B, C \in K$, si $A \vdash B$ et $B < C$, alors $A < C$.
- On dit que $<$ est **virtuellement totale** (virtually connected) sur la théorie K si et seulement si pour tout $A, B, C \in K$, si $A < B$, alors $A < C$ ou $C < B$.

Théorème.
Soit une théorie K. Une fonction de contraction sûre définie à partir d'une hiérarchie $<$ qui continue $\vdash$ vers le haut (ou vers le bas) sur K satisfait (K÷7). Une fonction de contraction sûre définie à partir d'une hiérarchie $<$ qui est virtuellement totale et qui continue $\vdash$ vers le haut et vers le bas sur K satisfait (K÷8).

Assignements fidèles

- ▷ Idée : Garder les mondes les plus proches de l'ancienne base.

Définition. Un **assignement fidèle** (faithful assignment) est une fonction qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre $\leq_\varphi$ sur les interprétations tel que :

- ▷ Si $\omega \models \varphi$ et $\omega' \models \varphi$, alors $\omega \simeq_\varphi \omega'$
- ▷ Si $\omega \models \varphi$ et $\omega' \not\models \varphi$, alors $\omega <_\varphi \omega'$
- ▷ Si $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, alors $\leq_{\varphi_1} = \leq_{\varphi_2}$

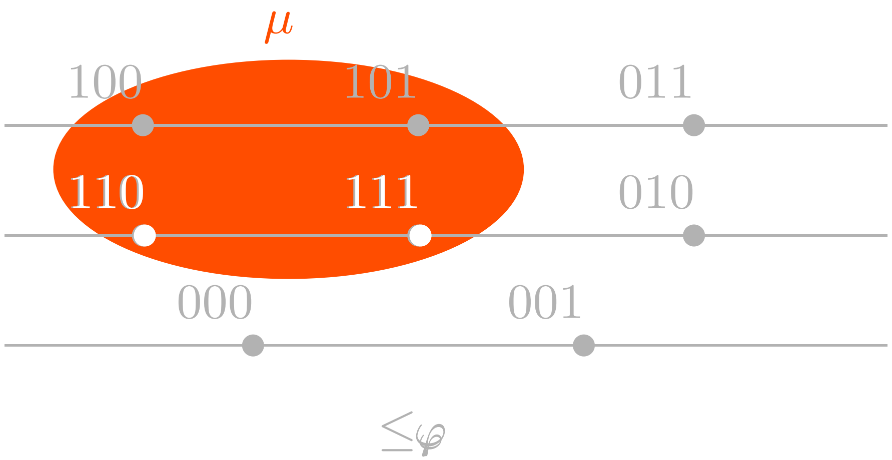
Théorème. [Katsuno Mendelzon 1991] Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats (R1)-(R6) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ tel que

$$mod(\varphi \circ \mu) = \min(mod(\mu), \leq_\varphi)$$

Assignements fidèles

Exemple de pré-ordre associé à $\varphi = \neg \textit{plume} \wedge \neg \textit{oiseau}$

Nouvelle information $\mu = \textit{plume}$



$$Mod(\varphi \circ \mu) = \{110, 111\}$$

$$\varphi \circ \mu = \textit{plume} \wedge \textit{oiseau}$$

Systèmes de Sphère

- On appelle **monde possible** un sous-ensemble maximal consistant du langage et on note $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des mondes possibles du langage $\mathcal{L}$.
- Soit une base de croyances K. Si $K = K_{\perp}$ alors $[K] = \emptyset$, sinon $[K] = \{M \in \mathbf{M}_{\mathcal{L}} \mid K \subseteq M\}$
- Soit un ensemble $S \in \mathbf{M}_{\mathcal{L}}$, l'ensemble $K_S = \bigcap\{M \mid M \in S\}$

Définition. Un **système de sphères centré sur** $[K]$ [Grove 1988] est une collection de sous-ensembles $\mathbf{S}$ de $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(S1) Si $S, S' \in \mathbf{S}$, alors $S \subseteq S'$ ou $S' \subseteq S$

(S2) $[K] \in \mathbf{S}$

(S3) Si $S \in \mathbf{S}$, alors $[K] \subseteq S$

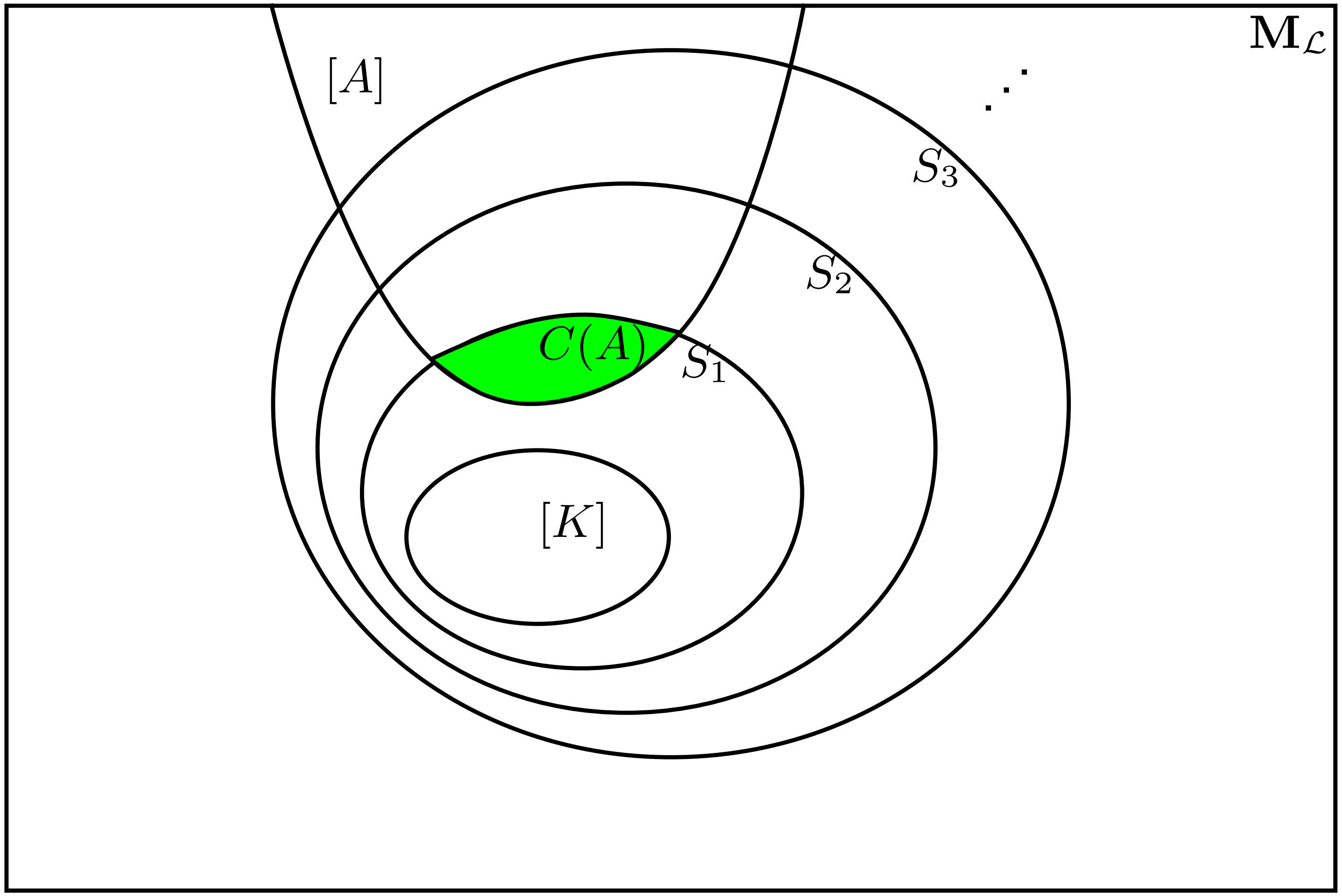
(S4) $\mathbf{M}_{\mathcal{L}} \in \mathbf{S}$

(S5) Si A est une formule et si $[A]$ intersecte une sphère de $\mathbf{S}$, alors il existe une sphère minimale qui intersecte $[A]$ (On note $C(A) = [A] \cap S_A$).

Systèmes de Sphère

Théorème. Soit une base de croyances K. Il existe un système de sphères $\mathbf{S}$ centré sur $[K]$ tel que pour toute formule A, $K * A = K_{C(A)}$ si et seulement si $*$ est un opérateur de révision satisfaisant $(K * 1) - (K * 8)$.

Systèmes de Sphère



Système de sphères centré sur $[K]$: Révision par A

Exemple : Opérateur de Dalal

- Soient deux interprétations ω et ω', la distance de Dalal (Hamming) entre ω et ω', notée $d_H(\omega, \omega')$, est le nombre de variables propositionnelles sur lesquelles les deux interprétations diffèrent. $d_H(\omega, \omega') = |\{x \in \mathcal{A} \mid \omega(x) \neq \omega'(x)\}|$.
- Soit une distance entre interprétations d, une formule φ et une interprétation ω, la distance entre l'interprétation ω et la formule φ est la distance minimale entre l'interprétation ω et les modèles de la formule φ: $d(\omega, \varphi) = \min_{\omega' \models \varphi} d(\omega, \omega')$
- Soit une distance entre une interprétation et une formule, on définit l'assignement correspondant: $\omega \leq_\varphi^D \omega'$ ssi $d_H(\omega, \varphi) \leq d_H(\omega', \varphi)$.
- L'opérateur de révision de Dalal est défini par $mod(\varphi \circ_D \mu) = \min(mod(\mu), \leq_\varphi^D)$

Théorème. L'opérateur de révision de Dalal est un opérateur de révision AGM (i.e. il satisfait les postulats (R1-R6)).

Exemple : Opérateur de Dalal

$\mathcal{A} = \{o, v, r\}$

$\varphi = o \wedge v$ $\mu = \neg v$

	110	111	φ
000	2	3	2
001	3	2	2
100	1	2	1
101	2	1	1

$$mod(\varphi \circ_D \mu) = \{100, 101\}$$

Système P - Système R

Définition. Une relation $\mid\!\sim$ est dite préférentielle si elle satisfait les six propriétés suivantes [Kraus Lehmann Magidor 1990, Makinson 1994] :

REF $$\frac{}{\alpha \mid\!\sim \alpha}$$

LLE $$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma}{\gamma \mid\!\sim \beta}$$

RW $$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \vdash \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$$

AND $$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \beta \wedge \gamma}$$

OR $$\frac{\alpha \mid\!\sim \gamma \quad \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma}$$

CM $$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \gamma \mid\!\sim \beta}$$

Une relation $\mid\!\sim$ est dite rationnelle si elle est préférentielle et satisfait la propriété suivante (monotonie rationnelle) [Lehmann Magidor 1992] :

RM $$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \quad \alpha \not\mid\!\sim \neg\gamma}{\alpha \wedge \gamma \mid\!\sim \beta}$$

Structure Préferentielle - Modèle Rangé

Définition. Une structure $\mathcal{M}$ est un triplet $\langle S, i, \prec \rangle$ où S est un ensemble d'objets quelconques (appelés états), $\prec$ est un ordre strict (i.e. une relation transitive et irréflexive) sur S et i est une fonction (la fonction d'interprétation) qui associe un monde à chaque état i.e. $i : S \longrightarrow \mathcal{W}$.
Soit une formule φ, on définit $mod_{\mathcal{M}}(\varphi) = \{s \in S : i(s) \models \varphi\}$ et $\min_{\mathcal{M}}(\varphi) = \min(mod_{\mathcal{M}}(\varphi), \prec)$.

Définition. Soit une structure $\mathcal{M} = \langle S, i, \prec \rangle$ et soit $T \subseteq S$. On dit que T est **smooth** s'il satisfait la propriété suivante :

$$\forall\ s \in T \setminus \min(T, \prec)\ \exists\ s' \in \min(T, \prec) \text{ t.q. } s' \prec s$$

On dit que $\mathcal{M}$ est un **modèle préférentiel** si $mod_{\mathcal{M}}(\alpha)$ est smooth pour toute formule α.

Définition. On dit que $\mathcal{M} = \langle S, i, \prec \rangle$ est un **modèle rangé** si c'est un modèle préférentiel et si $\prec$ est modulaire : i.e. si $x \not\prec y$, $y \not\prec x$ et $z \prec x$, alors $z \prec y$.

Théorèmes de Représentation

Définition. Soit un modèle préférentiel $\mathcal{M} = \langle S, i, \prec \rangle$. La relation d'inférence $\mid\!\sim_{\mathcal{M}}$ est définie par :

$$\alpha \mid\!\sim_{\mathcal{M}} \beta \text{ ssi } \min_{\mathcal{M}}(\alpha) \subseteq mod_{\mathcal{M}}(\beta)$$

Théorème. [Kraus Lehmann Magidor 1990] $\mid\!\sim$ est une relation préférentielle si et seulement si il existe un modèle préférentiel $\mathcal{M} = \langle S, i, \prec \rangle$ tel que $\mid\!\sim_{\mathcal{M}} = \mid\!\sim$. Si le langage est fini, on peut choisir un S fini.

Théorème. [Lehmann Magidor 1992] Une relation d'inférence $\mid\!\sim$ est rationnelle si et seulement si il existe un modèle rangé $\mathcal{M} = \langle S, i, \prec \rangle$ tel que $\mid\!\sim_{\mathcal{M}} = \mid\!\sim$.

Révision et relations d'inférence

"Belief revision and nonmonotonic logic are two sides of the same coin." [Gärdenfors 1990]

Théorème. [Makinson Gärdenfors 1989] Soient un opérateur de révision $*$ et une base de croyances K. Si on définit la relation $\mid\!\sim_K$ comme suit :

$$\alpha \mid\!\sim^*_K \beta \text{ ssi } \beta \in K * \alpha$$

Alors $\mid\!\sim^*_K$ est une relation rationnelle qui satisfait la règle suivante, nommée préservation de la consistance :

$$\text{Si } \alpha \mid\!\sim^*_K \bot, \text{ alors } \alpha \vdash \bot$$

Soit $\mid\!\sim$ une relation rationnelle qui préserve la consistance, il existe une base de croyances K et un opérateur $*$ tels que $\mid\!\sim \; = \; \mid\!\sim^*_K$.

Révision et relations d'inférence

- On dit qu'une base de croyances K correspond à une relation rationnelle $\mid\!\sim$ si $K = \{\alpha : \top \mid\!\sim \alpha\}$.

Théorème. Un opérateur $*$ est un opérateur de révision si et seulement si à chaque base de croyances K correspond une relation rationnelle $\mid\!\sim^*_K$ qui préserve la consistance telle que

$$\alpha \mid\!\sim^*_K \beta \text{ ssi } \beta \in K * \alpha$$

Révision et logique possibiliste

Soit une relation $\geq_c$ sur les formules, $A \geq_c B$ signifie "A est au moins aussi certain que B". $\geq_c$ est une **relation de nécessité qualitative** si elle vérifie les propriétés suivantes [Dubois 1986, Dubois Prade 1991] :

- **(D1)** $A \geq_c A$ **(réflexivité)**
- **(D2)** $A \geq_c B$ ou $B \geq_c A$ **(totalité)**
- **(D3)** Si $A \geq_c B$ et $B \geq_c C$, alors $A \geq_c C$ **(transitivité)**
- **(D4)** $\top >_c \bot$ **(non trivialité)**
- **(D5)** $\top \geq_c A$ **(certitude de la tautologie)**
- **(D6)** Si $A \geq_c B$, alors $A \wedge C \geq_c B \wedge C$ **(stabilité conjonctive)**

Théorème. [Dubois Prade 1991] L'ensemble d'axiomes (D1), (D2), (D3), (D5) et (D6) est équivalent à (EE1)-(EE4).

Fonction Ordinale Conditionnelle

Définition. [Spohn 1987] Une **fonction ordinale conditionnelle** (ordinal conditional function, OCF) κ est une fonction de l'ensemble des mondes possibles $\mathcal{W}$ vers la classe des ordinaux telle que au moins un monde est associé à 0.

- L'ordinal $\kappa(\omega)$ associé à un monde possible ω peut être vu comme le **degré d'incrédulité** (degree of disbelief) de ce monde dans l'état épistémique représenté par l'OCF.
- Cette fonction sur les mondes possibles peut être directement étendue aux propositions de la façon suivante : $\kappa(\varphi) = \min_{\omega \models \varphi} \kappa(\omega)$
- Une formule φ est crue pour un état épistémique représenté par κ si $\kappa(\varphi) = 0$. Sinon le degré d'incrédulité de φ est $\kappa(\varphi)$.
- **degré de confiance** :
  - soit $\kappa(\varphi) = 0$ et $\alpha = \kappa(\neg\varphi)$,
  - ou $\kappa(\varphi) > 0$ et $\alpha = -\kappa(\varphi)$.

Conditionnalisation

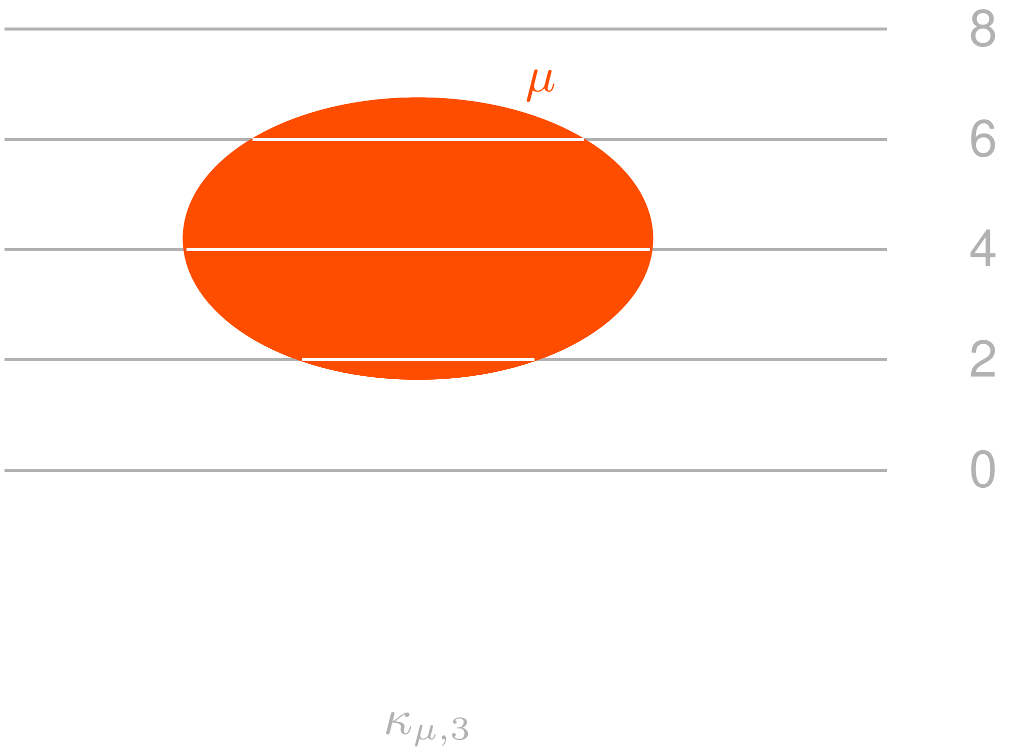
Définition. [Williams 1994] La (μ, α)-transmutation de κ est l'opération donnant un degré de confiance α à la formule μ.

Définition. [Spohn 1987] Soient un OCF κ, une formule φ, un ordinal α, la (φ, α)-conditionnalisation de κ est l'OCF $\kappa_{\varphi,\alpha}$ satisfaisant l'équation suivante :

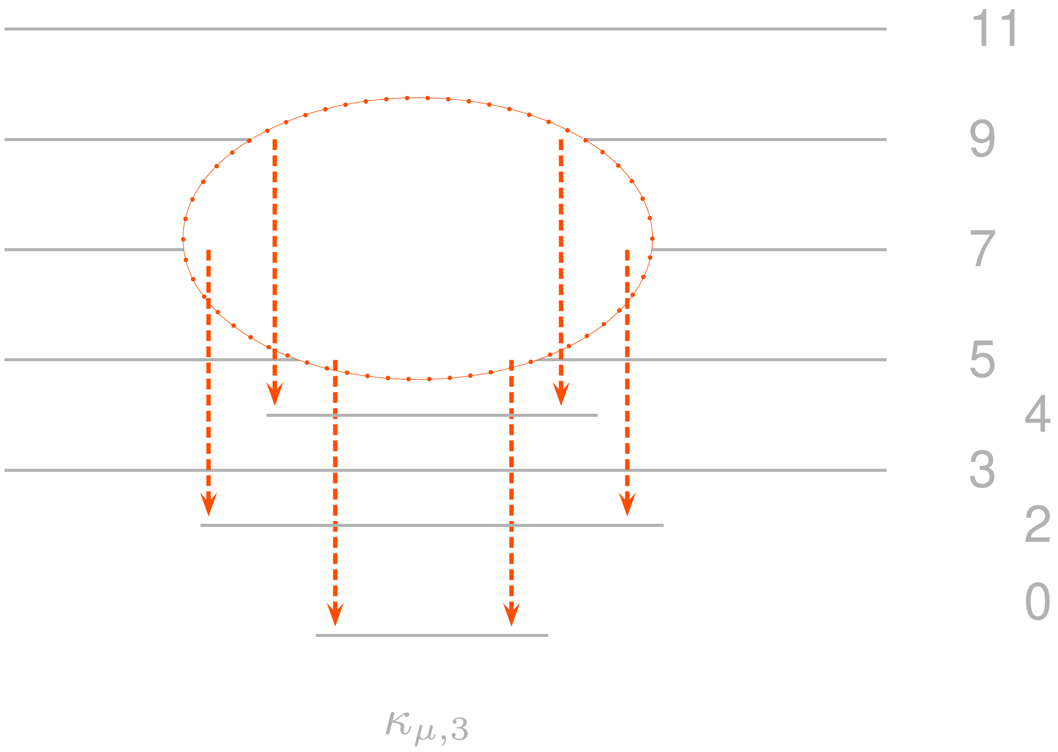
$$\kappa_{\varphi,\alpha}(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(\varphi) & \text{si } \omega \models \varphi \\ \kappa(\omega) - \kappa(\neg\varphi) + \alpha & \text{si } \omega \models \neg\varphi \end{cases}$$

Où $a - b$ représente l'unique ordinal c tel que $b + c = a$.

Conditionnalisation



Conditionnalisation



Mise à jour

Supposons que ma base de croyances décrive deux objets, un livre et un magazine, dans une pièce. Il y a une table dans cette pièce et les objets peuvent être ou non sur la table. La formule l signifie “le livre est sur la table” et m “le magazine est sur la table”. Je me rappelle que lorsque j’ai quitté cette pièce pour la dernière fois, il n’y avait qu’un seul objet sur la table, mais je n’ai pas pu voir lequel. Ma base de croyances est $(l \wedge \neg m) \vee (\neg l \wedge m)$. J’envoie un robot dans cette pièce avec comme instruction de mettre le magazine sur la table. C’est-à-dire que je vais incorporer m à ma base de croyances. Quelle est alors ma nouvelle base de croyances ?

- ▷ Révision : actualisation des croyances dans un monde statique.
- ▷ Mise-à-jour : actualisation des croyances dans un monde dynamique.

Mise à jour

Soient φ et μ deux formules d'un langage propositionnel fini. φ est la base de croyances, μ la nouvelle information et $\varphi \diamond \mu$ est une formule qui dénote la nouvelle base de croyances après mise à jour de φ par μ. $\diamond$ est un opérateur de **mise à jour** s'il satisfait les propriétés suivantes :

(U1) $\varphi \diamond \mu \vdash \mu$

(U2) Si $\varphi \vdash \mu$, alors $\varphi \diamond \mu \equiv \varphi$

(U3) Si φ et μ sont consistants alors $\varphi \diamond \mu$ est consistant

(U4) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$ alors $\varphi_1 \diamond \mu_1 \equiv \varphi_2 \diamond \mu_2$

(U5) $(\varphi \diamond \mu) \wedge \phi \vdash \varphi \diamond (\mu \wedge \phi)$

(U6) Si $\varphi \diamond \mu_1 \vdash \mu_2$ et $\varphi \diamond \mu_2 \vdash \mu_1$, alors $\varphi \diamond \mu_1 \equiv \varphi \diamond \mu_2$

(U7) Si φ est une formule complète, alors $(\varphi \diamond \mu_1) \wedge (\varphi \diamond \mu_2) \vdash \varphi \diamond (\mu_1 \vee \mu_2)$

(U8) $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \diamond \mu \equiv (\varphi_1 \diamond \mu) \vee (\varphi_2 \diamond \mu)$

Mise à jour

Théorème. [Katsuno Mendelzon 1991] Un opérateur de mise à jour $\diamond$ satisfait les postulats (U1)-(U8) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base interprétation ω un pré-ordre partiel $\leq_\omega$ tel que

$$mod(\varphi \diamond \mu) = \bigcup_{\omega \models \varphi} \min(mod(\mu), \leq_\omega)$$

Le postulat de restauration (recovery) $(K \div 5)$

J'apprends dans un livre que Cléopâtre avait un fils et une fille. J'ajoute donc à l'ensemble de mes croyances p et q dénotant respectivement le fait que Cléopatre avait un fils et une fille. Un ami m'apprend que le livre que je lisais n'était pas un livre d'histoire mais un roman. Je dois donc revoir mes croyances sur la maternité de Cléopatre et supprime donc de mes croyances le fait que Cléopatre avait un enfant $p \vee q$. Peu après, dans un livre d'histoire j'apprends que Cléopatre avait un enfant, j'ajoute donc à mes croyances $p \vee q$. Dois-je ajouter à mes croyances que Cléopatre avait un fils et une fille (ce qu'impose restauration) ? [Hansonn 1991]

"[recovery is] the only one among the six [(K÷1)-(K÷6)] that is open to query from the point of view of acceptability under its intended reading. [Makinson 1987]

Se débarrasser de Restauration

- Problème des opérateurs d'effacement (withdrawal):

$$K \div A = Cn(\emptyset) \ \ \forall A \in K$$

- Problème pour se débarrasser de restauration :
  Si $A \in K$ et $A \notin K \div B$, alors $\exists K'$ tel que $K' \subset K$ et $B \notin Cn(K')$ et $B \in Cn(K' \cup \{A\})$ **(conservation du noyau)**
- *Since it does not seem sensible for [a withdrawal operator] to violate core-retainment or any of [(K÷1)-(K÷4) and (K÷6)], a reasonable withdrawal (contraction) operator without the recovery postulate does not seem possible in the AGM framework. The* **pertinacity of the recovery property** *is a prominent feature of the AGM framework.* [Hansonn 1991]
- Contraction/Révision syntaxique (bases non closes déductivement).
- Ne concerne pas la révision !

Révision syntaxique

Nous sommes un jour férié et je me promène dans une ville qui compte deux fast-food. Je vois quelqu'un passer en mangeant un hamburger, j'en déduis donc qu'un des deux fast-food est ouvert $a \vee b$. En me dirigeant vers l'un des fast-food je vois de loin que l'éclairage de celui-ci fonctionne, j'en déduis donc que ce restaurant est ouvert a. Mes croyances à ce moment peuvent être représentées par la base de croyances $\{a, a \vee b\}$. Néanmoins, en arrivant à ce fast-food je lis une affiche indiquant que le restaurant est fermé aujourd'hui. L'éclairage ne fonctionnait que pour une personne faisant le nettoyage. La révision de ma base de croyances doit donc contenir $\neg a$ mais également $a \vee b$ car j'ai toujours de bonnes raisons de penser que l'un des restaurants est ouvert.

Imaginons à présent un scénario similaire, je me promène dans la ville mais ne croise pas de mangeur de hamburger. Lorsque je vois les lumières du fast-food ouvertes, ma base de croyances est alors $\{a\}$. Lorsque je lis l'affiche m'annonçant que le restaurant est fermé, je n'ai aucune raison de penser $a \vee b$, c'est-à-dire que l'un des deux restaurants est ouvert. [Hansonn 1989]

Ce dont je n'ai pas parlé

- Révision itérée
- Révision syntaxique
- Révision non-prioritaire
- Fusion de croyances

Bibliographie

Pour tout savoir sur la révision :

- P. Gärdenfors. **"Knowledge in flux"**. MIT Press. 1988.
- P. Gärdenfors (ed). **"Belief Revision"**. Cambridge University Press. 1992.
- S. Konieczny. **"Sur la logique du changement : révision et fusion de bases de connaissance"**. PhD Thesis. Université de Lille 1. 1999. (le seul avantage de cette référence par rapport aux deux autres est qu'elle est en francais !)
- P. Livet (ed). **"Révision des croyances"**. Hermes. 2002.

Bibliographie

Les articles cités dans les transparents :

- C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors and D. Makinson,**"On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions"**, Journal of Symbolic Logic 50. p 510-530. 1985.
- H. Katsuno and A. O. Mendelzon, **"Propositional knowledge base revision and minimal change"**, Artificial Intelligence 52. p 236-294. 1991.
- C. E. Alchourrón and D. Makinson, **"The logic of theory change: Contraction functions and their associated revision functions"**, Theoria 48. p 14-37. 1982.
- C. E. Alchourrón and D. Makinson, **"On the logic of theory change: Safe contraction"**, Studia Logica 44. p 405-422. 1985.
- A. Grove, **"Two modellings for theory change"**, Journal of Philosophical Logic 17. p 157-180. 1988.

Bibliographie

- M. Dalal, **"Investigations into a theory of knowledge base revision: preliminary report"**, AAAI'88. p 475-479. 1988.
- S. Kraus, D. Lehmann and M. Magidor, **"Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics"**, Artificial Intelligence 44. p 167-207. 1990.
- D. Makinson, **"General Pattern in nonmonotonic reasoning"**, Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming. p 35-110. 1994.
- D. Lehmann and M. Magidor, **"What does a conditional knowledge base entail?"**, Artificial Intelligence 55. p 1-60. 1992.
- D. Makinson and P. Gärdenfors, **"Relations between the logic of theory change and nonmonotonic logic"**, LNAI 465. p 185-205. 1989.
- P. Gärdenfors, **"Belief revision and nonmonotonic logic: two sides of the same coin ?"**, ECAI'90. p 768-773. 1990.

Bibliographie

- D. Dubois, **"Belief structures, possibility theory and decomposable confidence measures on finite sets"**, Computers and Artificial Intelligence 5(5). p 403-416. 1986.
- D. Dubois and H. Prade, **"Epistemic entrenchment and possibilistic logic"**, Artificial Intelligence 50. p 223-239. 1991.
- W. Spohn, **"Ordinal conditional functions: a dynamic theory of epistemic states"**, Causation in Decision, Belief Change, and Statistics 2. p 105-134. 1987.
- M. A. Williams, **"Transmutations of knowledge systems"**, KR'94. p 619-629. 1994.
- H. Katsuno and A. O. Mendelzon, **"On the difference between updating a knowledge base and revising it"**, KR'91. p 387-394. 1991.
- S. O. Hansson, **"Belief contraction without recovery"**, Studia Logica 50(2). p 251-260. 1991.

Bibliographie

- D. Makinson, **”On the status ot he postulate of recovery in the logic of theory change”**, Journal of Philosophical Logic 16. p 383-394. 1987.
- S. O. Hansson, **”New operators for theory change”**, Theoria 55. p 114-132. 1989.

Preuves

▷ $K + A = K + B$ ssi $B \in K + A$ et $A \in K + B$

Nous montrons d'abord la propriété suivante : **(i)** Si $B \in K + A$, alors $K + B \subseteq K + A$
(K+3) donne $K \subseteq K + A$. Donc d'apres (K+5) $K + B \subseteq (K + A) + B$. D'autre part, par hypothèse $B \in K + A$. Donc d'après (K+4) on a $(K + A) + B = K + A$. Donc $K + B \subseteq K + A$. □
Montrons à présent la propriété générale, le sens **seulement si** est trivial, d'après (K+2), $A \in K + A$, comme $K + A = K + B$, $A \in K + B$. De même $B \in K + A$.
Pour le sens **si** il suffit d'appliquer deux fois la propriété que nous venons de montrer, on obtient alors $K + B \subseteq K + A$ et $K + A \subseteq K + B$, on a donc bien si $B \in K + A$ et $A \in K + B$, alors $K + A = K + B$. □

▷ $(K + A) + B = (K + B) + A$

Montrons d'abord la propriété suivante : **(ii)** $(K + A) + B = K + (A \wedge B)$
D'après (K+1), (K+2) et (K+3) on sait que $A \wedge B \in (K + A) + B$. Donc d'après (i) on a $K + (A \wedge B) \subseteq (K + A) + B$.
Pour l'autre inclusion, considérons (K+3) qui nous donne $K \subseteq K + (A \wedge B)$. En appliquant deux fois (K+5) on a $(K + A) + B \subseteq ((K + (A \wedge B)) + A) + B$. Mais comme $A, B \in K + (A \wedge B)$, en appliquant (K+4) deux fois on a $((K + (A \wedge B)) + A) + B = K + (A \wedge B)$. On a donc bien $(K + A) + B \subseteq K + (A \wedge B)$. □

▷ Si $\neg A \in K$, alors $K + A = K_{\perp}$

D'après (K+3) $\neg A \in K + A$, et d'après (K+2) $A \in K + A$. Or comme d'après (K+1) $K + A$ est une théorie, alors $K + A = K_{\perp}$. □

Preuves

- Si on effectue une contraction (par intersection totale) par A, le résultat est l'ensemble des formules de K qui sont conséquences logiques de $\neg A$: $B \in K \div A$ ssi $B \in K$ et $\neg A \vdash B$

Trivialement, si A est une tautologie $\vdash A$, alors $\neg A \vdash B$, et d'après la définition de l'opérateur $K \div A = K$, donc on a bien $B \in K \div A$ ssi $B \in K$.
Pour le cas général (A étant une formule quelconque), par contradiction supposons que $B \in K$, $\neg A \vdash B$ et que $B \notin K \div A$. Il y a donc alors $K' \in K \perp A$ tel que $B \notin K'$. Or comme $B \in K$, et comme K' est une sous-théorie maximale n'impliquant pas A, on a $K' \cup \{B\} \vdash A$. D'au autre coté, puisque $\neg A \vdash B$, on a la contraposée $\neg B \vdash A$ qui nous donne $K' \cup \{\neg B\} \vdash A$. Avec ces deux implications on a $K' \vdash A$, ce qui contredit le fait que $K' \in K \perp A$.
Pour l'autre inclusion, supposons $B \notin K$ ou $\neg A \nvdash B$. Dans le premier cas, on a immédiatement $B \notin K \div A$. Dans le deuxième, qui donne par contraposition $\neg B \nvdash A$, on a donc $A \vee \neg B \nvdash A$. Il y a donc une sous-théorie maximale $K' \in K \perp A$ telle que $A \vee \neg B \in K'$. Mais alors $B \notin K'$, car par définition $A \notin K'$. Donc $B \notin \bigcap(K \perp A)$, ie $B \notin K \div A$. $\square$