

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

# Des réseaux de contraintes valuées aux *problèmes de décision séquentielle*

Thomas Schiex, *Cédric Pralet*

3 Juillet 2007



VCSP: cadre **générique** pour l'**optimisation incapable** de représenter efficacement certains problèmes :

	COUVERT	
Logique	SAT, maxSAT $(x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$	
Réseaux bayésiens	MPE $\max_{xyzt} P_x P_{z x} P_{y x} P_{t x,z}$	
Décision dans l'incertain		

VCSP: cadre **générique** pour l'**optimisation** (*NP-complet*)  
**incapable** de représenter efficacement certains problèmes :

	COUVERT	NON COUVERT
Logique	SAT, maxSAT $(x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$	QBF ( <i>PSPACE-complet</i> ) $\forall x \exists y \forall z (x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$
Réseaux bayésiens	MPE $\max_{xyz} P_x P_{z x} P_{y x} P_{t x,z}$	
Décision dans l'incertain		

VCSP: cadre **générique** pour l'**optimisation** (*NP-complet*)  
**incapable** de représenter efficacement certains problèmes :

	COUVERT	NON COUVERT
Logique	SAT, maxSAT $(x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$	QBF ( <i>PSPACE-complet</i> ) $\forall x \exists y \forall z (x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$
Réseaux bayésiens	MPE $\max_{xyzt} P_x P_{z x} P_{y x} P_{t x,z}$	MAP ( <i>NP<sup>PP</sup>-complet</i> ) $\max_{xy} \sum_{zt} P_x P_{z x} P_{y x} P_{t x,z}$
Décision dans l'incertain		

VCSP: cadre **générique** pour l'**optimisation** (*NP-complet*)  
**incapable** de représenter efficacement certains problèmes :

	COUVERT	NON COUVERT
Logique	SAT, maxSAT $(x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$	QBF ( <i>PSPACE-complet</i> ) $\forall x \exists y \forall z (x \vee y) \wedge (y \vee \neg z)$
Réseaux bayésiens	MPE $\max_{xyzt} P_x P_{z x} P_{y x} P_{t x,z}$	MAP ( <i>NP<sup>PP</sup>-complet</i> ) $\max_{xy} \sum_{zt} P_x P_{z x} P_{y x} P_{t x,z}$
Décision dans l'incertain		Diagrammes d'influence MDP

## Question

Peut-on définir un cadre générique à base de fonctions valuées pour *modéliser et résoudre* une plus grande classe de problèmes?

# Idée générale du passage des VCSP à un cadre plus large

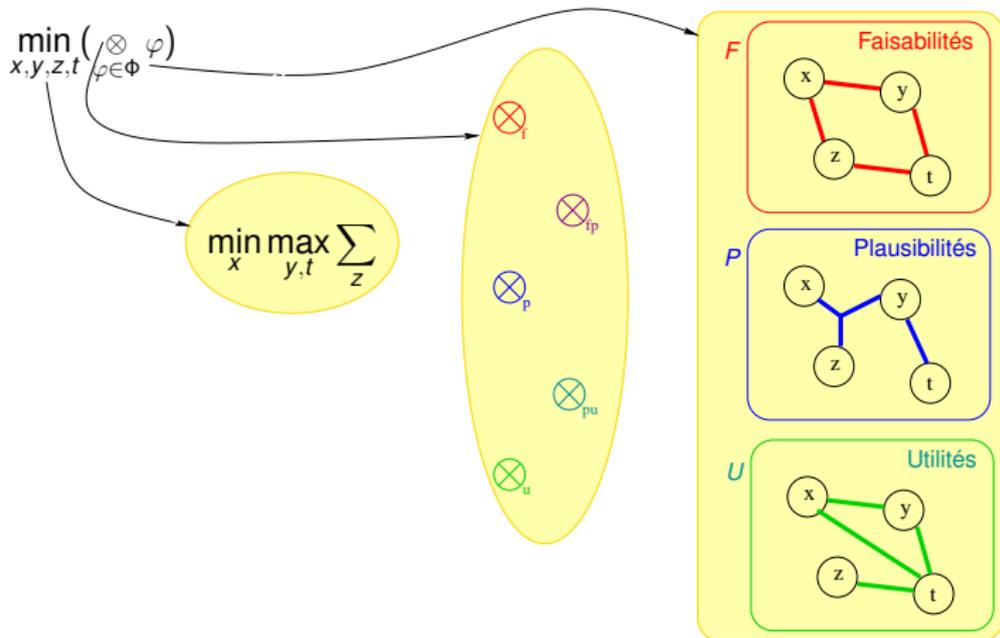
Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion



# Idée générale du passage des VCSP à un cadre plus large

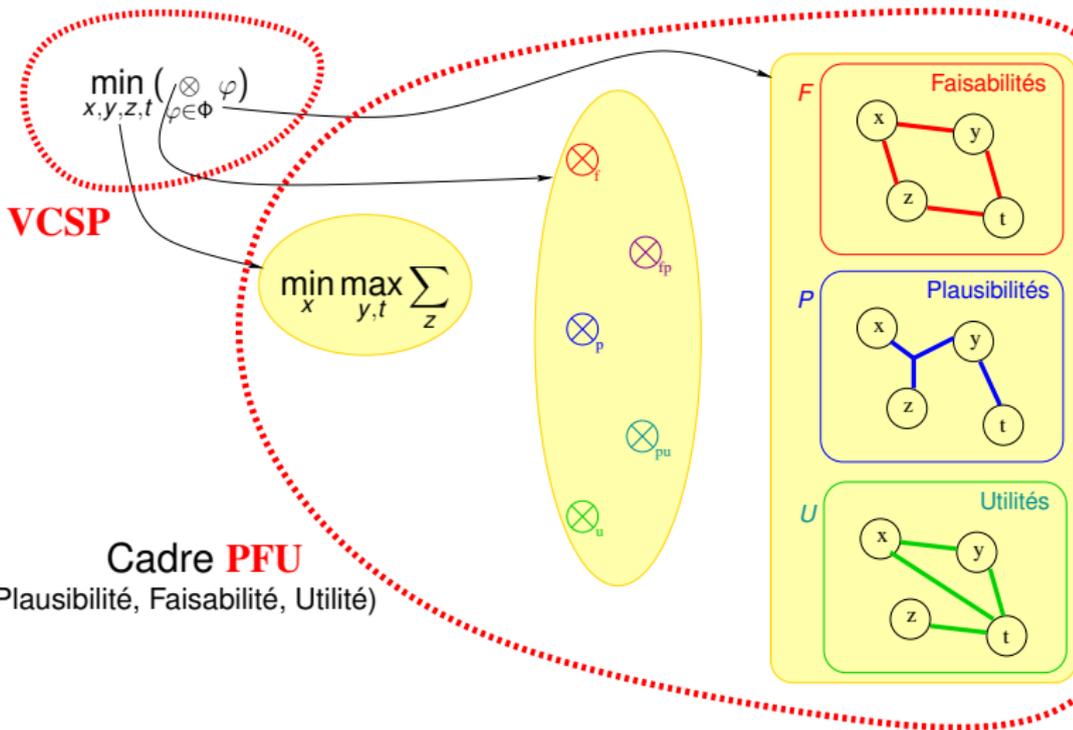
Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion



Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

- 1 Exemple de problème incluant plausibilités, faisabilités et utilités
- 2 Le cadre PFU
- 3 Algorithmes génériques sur le cadre PFU

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

- 1 Exemple de problème incluant plausibilités, faisabilités et utilités
- 2 Le cadre PFU
- 3 Algorithmes génériques sur le cadre PFU

# Exemple introductif

Introduction

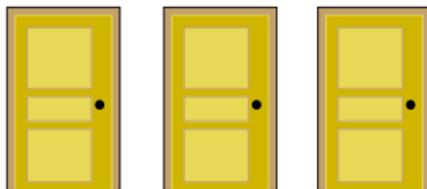
Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

*Jean doit décider d'ouvrir une porte*  
*Un trésor derrière une des portes*  
*Un voleur derrière une des portes*



A

B

C



# Exemple introductif

Introduction

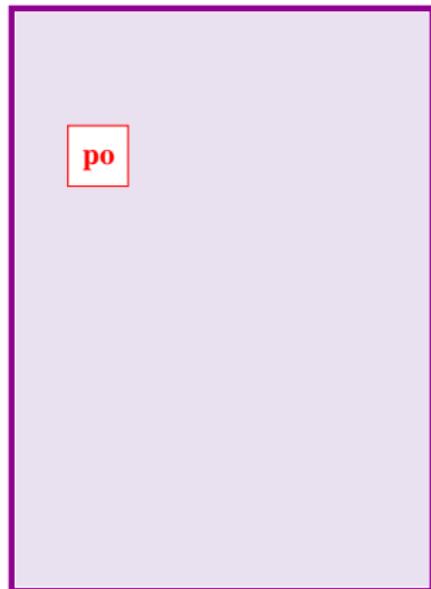
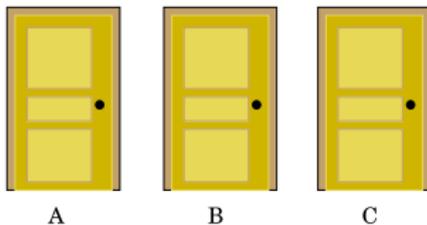
Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

*Jean doit décider d'ouvrir une porte*  
*Un trésor derrière une des portes*  
*Un voleur derrière une des portes*



**Variables de décision**  
(contrôlables)

# Exemple introductif

Introduction

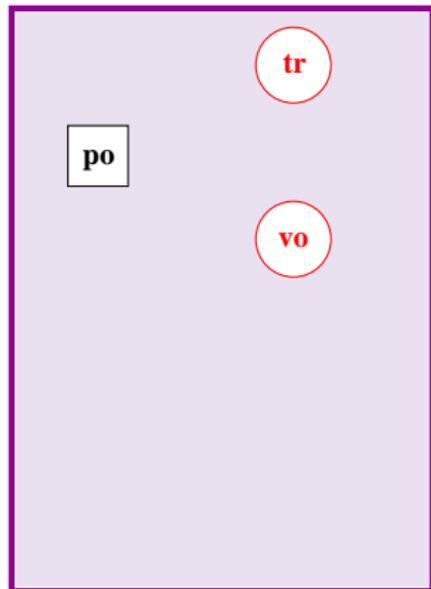
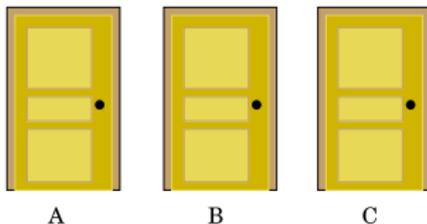
Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

*Jean doit décider d'ouvrir une porte*  
*Un trésor derrière une des portes*  
*Un voleur derrière une des portes*



Variables de décision  
(contrôlables)

**Variables d'environnement**  
(incontrôlables)

# Exemple introductif

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

*Trésor*: +10,000€

*Voleur*: -4,000€



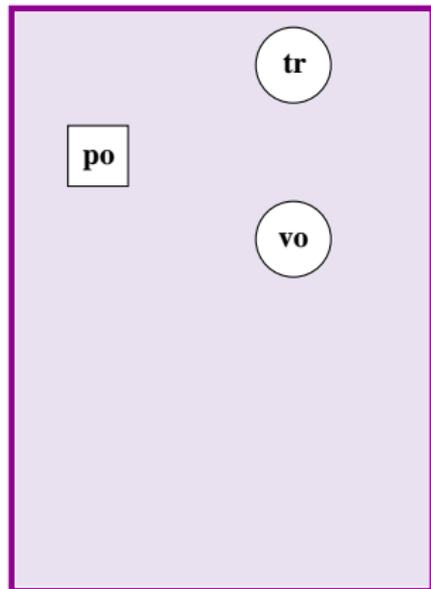
A



B



C



# Exemple introductif

Introduction

Exemple

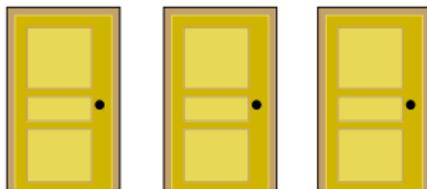
Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

*Trésor*: +10,000€

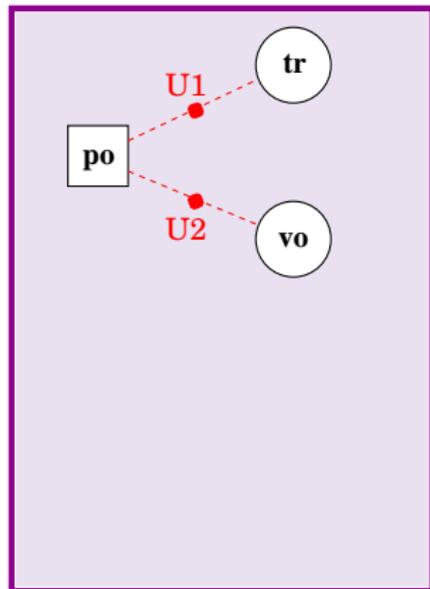
*Voleur*: -4,000€



A

B

C



**Fonctions locales d'utilité**

$U_1 : po = tr (+10\text{ K€})$

$U_2 : po = vo (-4\text{ K€})$

# Exemple introductif

Introduction

Exemple

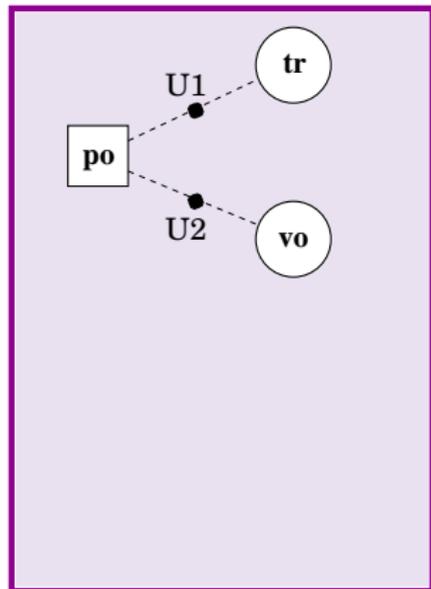
Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Incertitudes** sur l'état de  
l'environnement (**plausibilités**):

*Le trésor et le voleur ne sont pas derrière  
la même porte et toutes les situations  
possibles sont équiprobables.*



# Exemple introductif

Introduction

Exemple

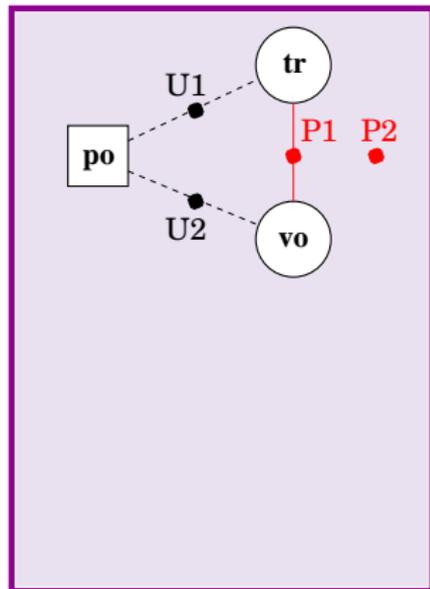
Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Incertitudes** sur l'état de  
l'environnement (**plausibilités**):

*Le trésor et le voleur ne sont pas derrière  
la même porte et toutes les situations  
possibles sont équiprobables.*



**Fonctions locales de  
plausibilité**

$P_1 : vo \neq tr$

$P_2 : 1/6$

# Exemple introductif

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

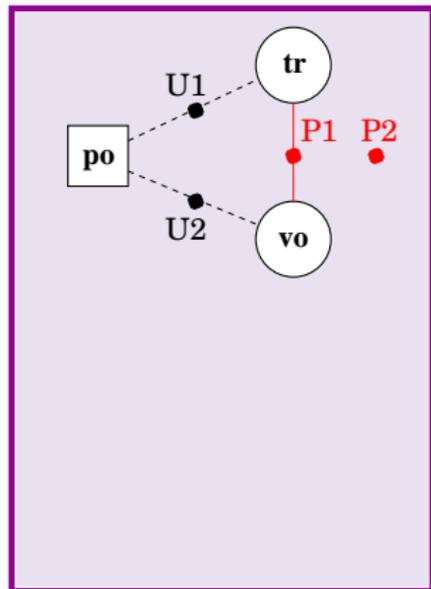
Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Incertitudes** sur l'état de  
l'environnement (**plausibilités**):

*Le trésor et le voleur ne sont pas derrière  
la même porte et toutes les situations  
possibles sont équiprobables.*

*Jean et son compagnon Pierre peuvent  
chacun écouter à une porte.  
Probabilité d'entendre quelque chose:  
fonction de la position du voleur.*



**Fonctions locales de  
plausibilité**

$P_1 : vo \neq tr$

$P_2 : 1/6$

# Exemple introductif

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

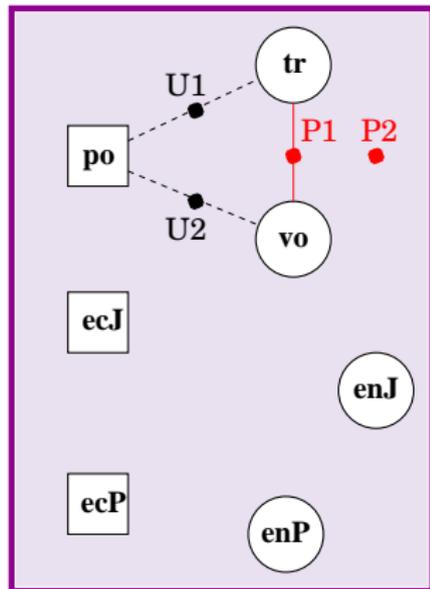
Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Incertitudes** sur l'état de  
l'environnement (**plausibilités**):

*Le trésor et le voleur ne sont pas derrière  
la même porte et toutes les situations  
possibles sont équiprobables.*

*Jean et son compagnon Pierre peuvent  
chacun écouter à une porte.  
Probabilité d'entendre quelque chose:  
fonction de la position du voleur.*



**Fonctions locales de  
plausibilité**

$P_1 : vo \neq tr$

$P_2 : 1/6$

# Exemple introductif

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

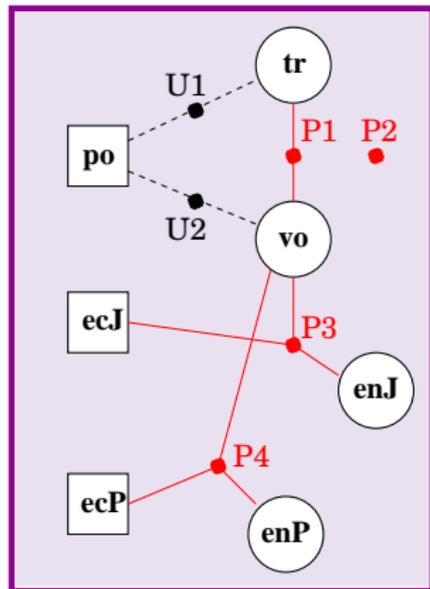
Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Incertitudes** sur l'état de  
l'environnement (**plausibilités**):

*Le trésor et le voleur ne sont pas derrière  
la même porte et toutes les situations  
possibles sont équiprobables.*

*Jean et son compagnon Pierre peuvent  
chacun écouter à une porte.  
Probabilité d'entendre quelque chose:  
fonction de la position du voleur.*



**Fonctions locales de  
plausibilité**

$$P_3 : P(en_J | ec_J, vo)$$

$$P_4 : P(en_P | ec_P, vo)$$

# Exemple introductif

Introduction

Exemple

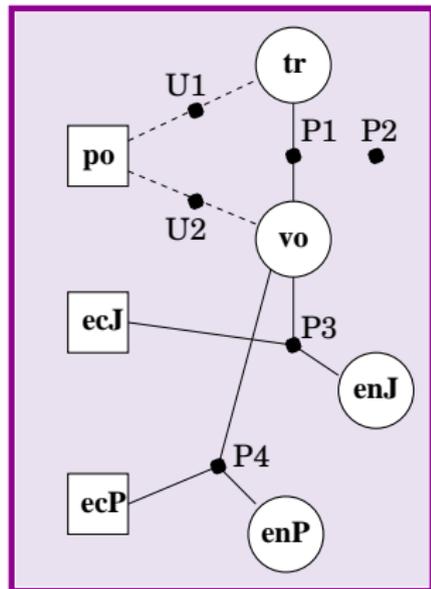
Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

Règles:

*Jean et Pierre ne peuvent pas écouter à la même porte et ouvrir la porte A est interdit.*



# Exemple introductif

Introduction

Exemple

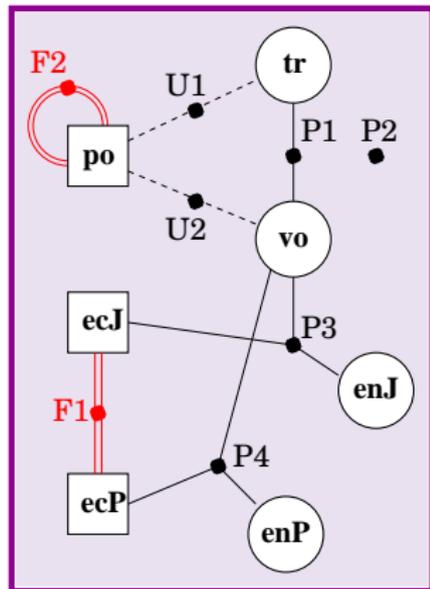
Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

Règles:

*Jean et Pierre ne peuvent pas écouter à la même porte et ouvrir la porte A est interdit.*



**Fonctions locales de faisabilité**

$F_1 : ec_J \neq ec_P$

$F_2 : po \neq A$

# Exemple introductif

Introduction

Exemple

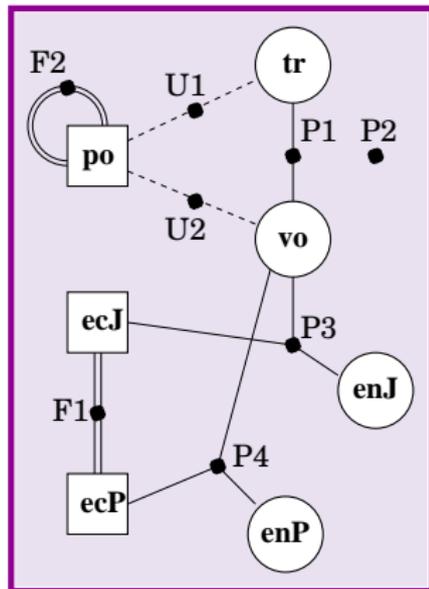
Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

Règles:

*Jean et Pierre ne peuvent pas écouter à la même porte et ouvrir la porte A est interdit.*



**Modèle graphique  
composite**

# Requête sur le problème

Règles de décision **maximisant l'utilité espérée** si d'abord Pierre et Jean écoutent chacun à une porte, et ensuite Jean choisit une porte à ouvrir en fonction de ce qui a été entendu?

Introduction

Exemple

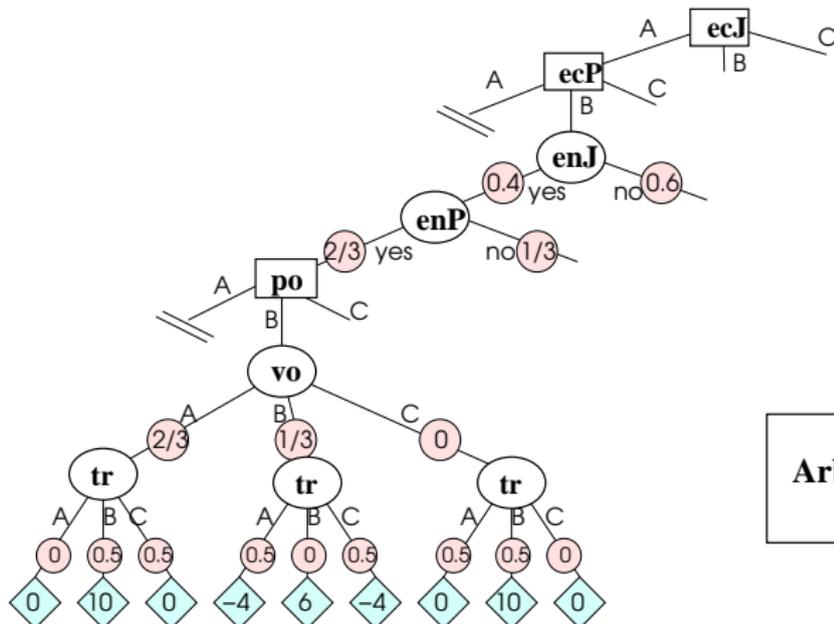
Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

# Requête sur le problème

Règles de décision **maximisant l'utilité espérée** si d'abord Pierre et Jean écoutent chacun à une porte, et ensuite Jean choisit une porte à ouvrir en fonction de ce qui a été entendu?



Arbre de décision

# Requête sur le problème

Répondre à la requête en utilisant un arbre de décision



Calculer des règles de décision optimales pour la quantité

$$\max_{ec_J, ec_P} \sum_{en_J, en_P} \max_{po} \sum_{vo, tr} \left( \left( \bigwedge_{i \in [1,2]} F_i \right) \star \left( \prod_{i \in [1,4]} P_i \right) \times \left( \sum_{i \in [1,2]} U_i \right) \right)$$

★ = opérateur de troncature qui masque les décisions infaisables

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

## Forme générale des requêtes:

$$\min_{ec_P} \max_{ec_J} \sum_{en_J} \max_{po} \sum_{en_P} \sum_{vo, tr} \left( \left( \bigwedge_{i \in [1,2]} F_i \right) \star \left( \prod_{i \in [1,4]} P_i \right) \times \left( \sum_{i \in [1,2]} U_i \right) \right)$$

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

## Forme générale des requêtes:

$$\min_{ec_P} \max_{ec_J} \sum_{en_J} \max_{po} \sum_{en_P} \sum_{vo, tr} \left( \left( \bigwedge_{i \in [1,2]} F_i \right) \star \left( \prod_{i \in [1,4]} P_i \right) \times \left( \sum_{i \in [1,2]} U_i \right) \right)$$

⇓

$$\min_{ec_P} \max_{ec_J} \oplus_U \max_{en_J} \oplus_U \oplus_U \left( \left( \bigwedge_{F_i \in F} F_i \right) \star \left( \otimes_p P_i \right) \otimes_{pu} \left( \otimes_U U_i \right) \right)$$

	$\oplus_p$	$\otimes_p$	$\oplus_U$	$\otimes_{pu}$	$\otimes_U$
EU additive probabiliste	+	×	+	×	+
Satisfaction esp. probabiliste	+	×	+	×	×
EU possibiliste optimiste	max	min	max	min	min
EU possibiliste pessimiste	max	min	min	$\max(1-p, u)$	min
EU with $\kappa$ -rankings	min	+	min	+	min
EU booléenne 1	$\vee$	$\wedge$	$\vee$	$\wedge$	$\wedge$
EU booléenne 2	$\vee$	$\wedge$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\vee$

$$\min_{eC_P} \max_{eC_J} \oplus_U \max_{eN_J} \oplus_U \oplus_U \left( \left( \bigwedge_{F_i \in F} F_i \right) \star \left( \bigotimes_{P_i \in P} P_i \right) \otimes_{pu} \left( \bigotimes_{U_i \in U} U_i \right) \right)$$

**Trois éléments clé** à définir:

- 1 une **structure algébrique**
- 2 un **réseau de fonctions locales**
- 3 une **séquence d'élimination de variables**

Formalisme obtenu: **le cadre PFU (Plausibilité-Faisabilité-Utilité)**

Introduction

Exemple

**Le cadre PFU**

Une structure algébrique générique

Réseau de fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes génériques sur le cadre PFU

Conclusion

1 Exemple de problème incluant plausibilités, faisabilités et utilités

2 **Le cadre PFU**

- Une structure algébrique générique
- Réseau de fonctions locales
- Requêtes
- Analyse du cadre

3 Algorithmes génériques sur le cadre PFU

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

1 Exemple de problème incluant plausibilités, faisabilités et utilités

2 Le cadre PFU

- Une structure algébrique générique
- Réseau de fonctions locales
- Requêtes
- Analyse du cadre

3 Algorithmes génériques sur le cadre PFU

# Premier élément clé: une structure algébrique

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**But:** spécifier comment les informations sont **combinées et synthétisées**

Différents éléments:

- 1 une **structure de plausibilité**:  $(E_p, \preceq_p, \oplus_p, \otimes_p)$   
ex:  $(\mathbb{R}^+, \leq, +, \times)$  pour les probabilités

# Premier élément clé: une structure algébrique

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**But:** spécifier comment les informations sont **combinées et synthétisées**

Différents éléments:

- 1 une **structure de plausibilité**:  $(E_p, \preceq_p, \oplus_p, \otimes_p)$   
ex:  $(\mathbb{R}^+, \leq, +, \times)$  pour les probabilités
- 2 une **structure d'utilité**:  $(E_u, \preceq_u, \otimes_u)$   
ex:  $(\mathbb{R}, \leq, +)$  pour les utilités additives

# Premier élément clé: une structure algébrique

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**But:** spécifier comment les informations sont **combinées et synthétisées**

Différents éléments:

- 1 une **structure de plausibilité**:  $(E_p, \preceq_p, \oplus_p, \otimes_p)$   
ex:  $(\mathbb{R}^+, \leq, +, \times)$  pour les probabilités
- 2 une **structure d'utilité**:  $(E_u, \preceq_u, \otimes_u)$   
ex:  $(\mathbb{R}, \leq, +)$  pour les utilités additives
- 3 une **structure d'utilité espérée**:  $(E_p, E_u, \oplus_u, \otimes_{pu})$   
 $\sum_x (p_x \times u_x)$  devient  $\oplus_u (p_x \otimes_{pu} u_x)$

# Premier élément clé: une structure algébrique

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**But:** spécifier comment les informations sont **combinées et synthétisées**

Différents éléments:

- 1 une **structure de plausibilité**:  $(E_p, \preceq_p, \oplus_p, \otimes_p)$   
ex:  $(\mathbb{R}^+, \leq, +, \times)$  pour les probabilités
- 2 une **structure d'utilité**:  $(E_u, \preceq_u, \otimes_u)$   
ex:  $(\mathbb{R}, \leq, +)$  pour les utilités additives
- 3 une **structure d'utilité espérée**:  $(E_p, E_u, \oplus_u, \otimes_{pu})$   
 $\sum_x (p_x \times u_x)$  devient  $\oplus_u \bigoplus_x (p_x \otimes_{pu} u_x)$
- 4 des **axiomes** sur ces structures inspirés par  
[Friedman-Halpern' 95] et [Chu-Halpern' 03]

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

**Réseau de  
fonctions locales**

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

1 Exemple de problème incluant plausibilités, faisabilités et utilités

2 **Le cadre PFU**

- Une structure algébrique générique
- **Réseau de fonctions locales**
- Requêtes
- Analyse du cadre

3 Algorithmes génériques sur le cadre PFU

### Définition

Un **réseau PFU** est un tuple  $(V, G, P, F, U)$  où

- $V$ : ensemble fini de **variables de décision et d'environnement**
- $G$ : DAG représentant des **conditions de normalisation**
- $P = \{P_1, P_2, \dots\}$ : ensemble fini de fonctions de **plausibilité**
- $F = \{F_1, F_2, \dots\}$ : ensemble fini de fonctions de **faisabilité**
- $U = \{U_1, U_2, \dots\}$ : ensemble fini de fonctions d'**utilité**

Les fonctions **locales** expriment des quantités **globales** (factorisation justifiée par la notion d'**indépendance conditionnelle**).

# Réseau PFU du problème du trésor

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

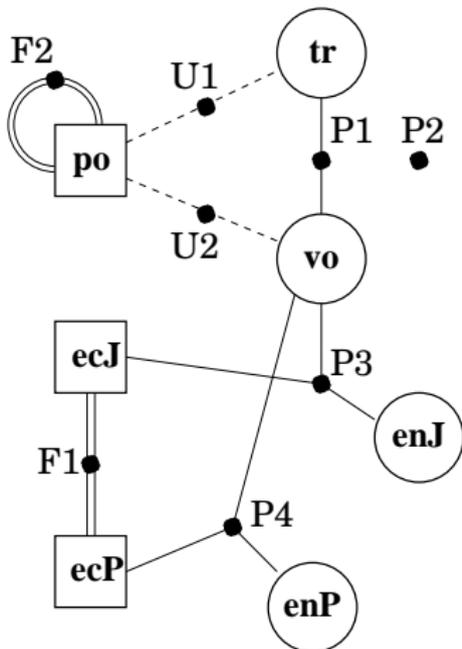
Requêtes

Analyse du cadre

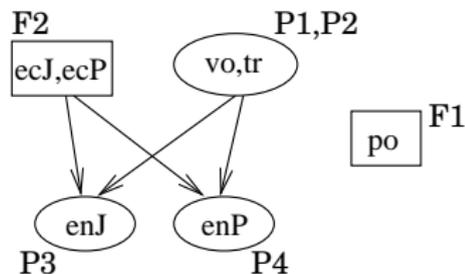
Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

## Réseau de fonctions locales



## Graphe acyclique orienté (DAG)



Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

**Requêtes**

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

1 Exemple de problème incluant plausibilités, faisabilités et utilités

2 Le cadre PFU

- Une structure algébrique générique
- Réseau de fonctions locales
- **Requêtes**
- Analyse du cadre

3 Algorithmes génériques sur le cadre PFU

# Troisième élément clé: requêtes sur un réseau PFU

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

**Requêtes**

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**But:** définir des **problèmes de décision**

## Définition

Requête = **s**équence de couples **opérateur-v**ariables = **Sov**

ex:  $Sov = \min_{ec_p} \max_{ec_j} \oplus_{u_{en_j}} \max_{po} \oplus_{u_{en_p}} \oplus_{u_{vo, tr}}$

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**But:** définir des **problèmes de décision**

## Définition

Requête = **s**équence de couples **o**opérateur-**v**ariables = **Sov**

ex:  $Sov = \min_{ec_p} \max_{ec_j} \oplus_{u \in n_j} \max_{po} \oplus_{u \in n_p} \oplus_{u \in v_o, tr}$

**Sémantique:**

- ordre d'élimination → **ordre des décisions et des observations**

# Troisième élément clé: requêtes sur un réseau PFU

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**But:** définir des **problèmes de décision**

## Définition

Requête = **s**équence de couples **o**opérateur-**v**ariables = **Sov**

ex:  $Sov = \min_{ec_p} \max_{ec_j} \oplus_{u \in n_j} \max_{po} \oplus_{u \in n_p} \oplus_{u \in v_o, tr}$

## Sémantique:

- ordre d'élimination → **ordre des décisions et des observations**
- min ou max sur une décision → attitude **optimiste ou pessimiste**

## Troisième élément clé: requêtes sur un réseau PFU

Répondre à une requête = calculer des **utilités espérées optimales** et/ou des **règles de décision optimales**

Réponse à une requête  $Q$ :

$$Ans(Q) = Sov \left( \left( \left( \bigwedge_{F_i \in F} F_i \right) \star \left( \bigotimes_{P_i \in P} P_i \right) \right) \otimes_{pu} \left( \bigotimes_{U_i \in U} U_i \right) \right)$$

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

## Troisième élément clé: requêtes sur un réseau PFU

Répondre à une requête = calculer des **utilités espérées optimales** et/ou des **règles de décision optimales**

Réponse à une requête  $Q$ :

$$Ans(Q) = Sov \left( \left( \bigwedge_{F_i \in F} F_i \right) \star \left( \bigotimes_{P_i \in P} P_i \right) \otimes_{pu} \left( \bigotimes_{U_i \in U} U_i \right) \right)$$

### Théorème

La définition de  $Ans(Q)$  est **équivalente** à une définition à base d'arbre de décision

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

## Troisième élément clé: requêtes sur un réseau PFU

Répondre à une requête = calculer des **utilités espérées optimales** et/ou des **règles de décision optimales**

Réponse à une requête  $Q$ :

$$Ans(Q) = Sov \left( \left( \bigwedge_{F_i \in F} F_i \right) \star \left( \bigotimes_{P_i \in P} P_i \right) \otimes_{pu} \left( \bigotimes_{U_i \in U} U_i \right) \right)$$

### Théorème

La définition de  $Ans(Q)$  est **équivalente** à une définition à base d'arbre de décision

### Théorème

Savoir si  $Ans(Q) > \alpha$  est un problème PSPACE-complet

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

1 Exemple de problème incluant plausibilités, faisabilités et utilités

2 Le cadre PFU

- Une structure algébrique générique
- Réseau de fonctions locales
- Requêtes
- **Analyse du cadre**

3 Algorithmes génériques sur le cadre PFU

# Des VCSP au cadre PFU

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

VCSP	PFU
Structure de valuation	Structure d'utilité espérée
Contraintes valuées	Fonctions de plausibilité, de faisabilité et d'utilité
Optimisation	Optimisation et calcul d'utilité espérée
NP-complet	PSPACE-complet

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Théorème:** le cadre PFU permet d'exprimer des requêtes sur:

CSP  
Valued CSP  
Quantified CSP  
Mixed and probabilistic CSP  
Stochastic CSP

# Théorème d'unification

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Théorème:** le cadre PFU permet d'exprimer des requêtes sur:

CSP  
Valued CSP  
Quantified CSP  
Mixed and probabilistic CSP  
Stochastic CSP

SAT  
Quantified boolean formulas  
Stochastic SAT  
Extended stochastic SAT

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Théorème:** le cadre PFU permet d'exprimer des requêtes sur:

CSP  
Valued CSP  
Quantified CSP  
Mixed and probabilistic CSP  
Stochastic CSP

SAT  
Quantified boolean formulas  
Stochastic SAT  
Extended stochastic SAT

Bayesian networks  
Hybrid networks  
Markov Random Fields  
Chain graphs  
Probability computation  
MPE (Most Probable Explanation)  
MAP (Maximum A Posteriori hyp.)

# Théorème d'unification

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Théorème:** le cadre PFU permet d'exprimer des requêtes sur:

CSP  
Valued CSP  
Quantified CSP  
Mixed and probabilistic CSP  
Stochastic CSP

SAT  
Quantified boolean formulas  
Stochastic SAT  
Extended stochastic SAT

Bayesian networks  
Hybrid networks  
Markov Random Fields  
Chain graphs  
Probability computation  
MPE (Most Probable Explanation)  
MAP (Maximum A Posteriori hyp.)

Influence diagrams  
Valuation networks

# Théorème d'unification

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

**Théorème:** le cadre PFU permet d'exprimer des requêtes sur:

CSP  
Valued CSP  
Quantified CSP  
Mixed and probabilistic CSP  
Stochastic CSP

Finite-horizon Markov decision processes (MDP)  
probabilistic/possibilistic/with kappa rankings  
completely or partially (POMDP) observable  
factored or not

SAT  
Quantified boolean formulas  
Stochastic SAT  
Extended stochastic SAT

Bayesian networks  
Hybrid networks  
Markov Random Fields  
Chain graphs  
Probability computation  
MPE (Most Probable Explanation)  
MAP (Maximum A Posteriori hyp.)

Influence diagrams  
Valuation networks

# Théorème d'unification

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure algébrique générique

Réseau de fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes génériques sur le cadre PFU

Conclusion

**Théorème:** le cadre PFU permet d'exprimer des requêtes sur:

CSP  
Valued CSP  
Quantified CSP  
Mixed and probabilistic CSP  
Stochastic CSP

Finite-horizon Markov decision processes (MDP)  
probabilistic/possibilistic/with kappa rankings  
completely or partially (POMDP) observable  
factored or not

SAT  
Quantified boolean formulas  
Stochastic SAT  
Extended stochastic SAT

Bayesian networks  
Hybrid networks  
Markov Random Fields  
Chain graphs  
Probability computation  
MPE (Most Probable Explanation)  
MAP (Maximum A Posteriori hyp.)

Influence diagrams  
Valuation networks

Finite-horizon  
STRIPS planning,  
Conformant planning,  
Probabilistic planning

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Une structure  
algébrique  
générique

Réseau de  
fonctions locales

Requêtes

Analyse du cadre

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

- **Flexibilité** en terme de problèmes exprimables
- Définition implicite de **nouveaux formalismes**  
*ex: diagrammes d'influence possibiliste [Garcia-Sabbadin'06]*  
*VCSP quantifiés*
- Cependant, existence de **cadres non couverts**  
*ex: fonctions de croyance*

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

- 1 Exemple de problème incluant plausibilités, faisabilités et utilités
- 2 Le cadre PFU
- 3 Algorithmes génériques sur le cadre PFU**

Algorithme d'élimination de variables **utilisable pour PFU**

Particularité: **contraintes sur l'ordre d'élimination**

$$\text{ex: } \text{Sov} = \max_{x,y} \sum_z \max_t \quad \Rightarrow \quad x, y \prec_{\text{Sov}} z \prec_{\text{Sov}} t$$

Algorithme d'élimination de variables **utilisable pour PFU**

Particularité: **contraintes sur l'ordre d'élimination**

$$\text{ex: } \text{Sov} = \max_{x,y} \sum_z \max_t \quad \Rightarrow \quad x, y \prec_{\text{Sov}} z \prec_{\text{Sov}} t$$

## Théorème

Complexité théorique exponentielle en un paramètre appelé **largeur induite contrainte**

Certaines aspects non utilisées par VE:

- Décompositions utilisant **plus que la distributivité**

$$\text{ex: } \sum_x p_x \cdot (u_{xy} + u_{xz}) = (\sum_x p_x \cdot u_{xy}) + (\sum_x p_x \cdot u_{xz})$$

- **Libertés cachées** dans l'ordre d'élimination

$$\text{ex: } \sum_x \max_y \sum_z (\varphi_{xy} \cdot \varphi_{xz} \cdot \varphi_{xt}) = \sum_{xz} \max_y (\varphi_{xy} \cdot \varphi_{xz} \cdot \varphi_{xt})$$

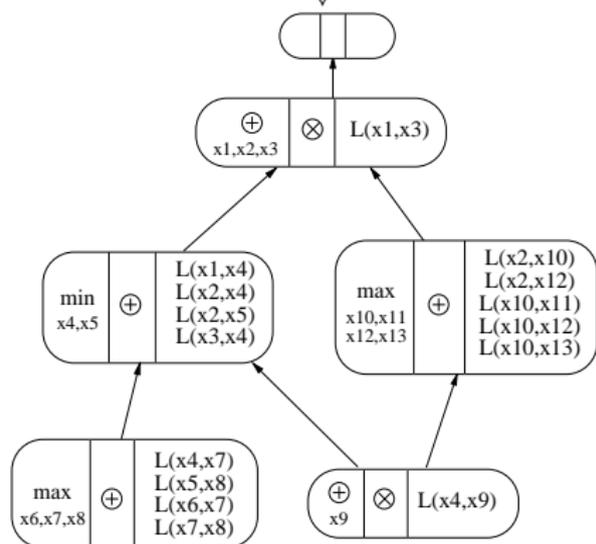
- Conditions de **normalisations**

$$\text{ex: } \sum_x P_x |_{pa(x)} = 1$$

Introduction d'un système de **règles de réécriture** des requêtes

# Macro-structuration

$$\text{Sov} \left( \left( \left( F_i \wedge_{F_i \in F} F_i \right) * \left( P_i \otimes_{P_i \in P} P_i \right) \right) \otimes \left( U_i \oplus_{U_i \in U} U_i \right) \right)$$



Requête  
multi-opérateur

DAG de requêtes  
mono-opérateur

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

# Structuration plus fine

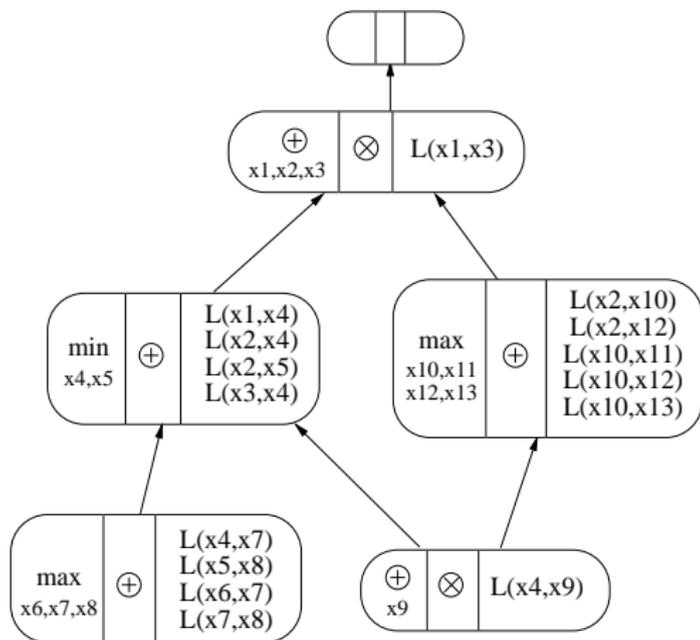
Introduction

Exemple

Le cadre PFU

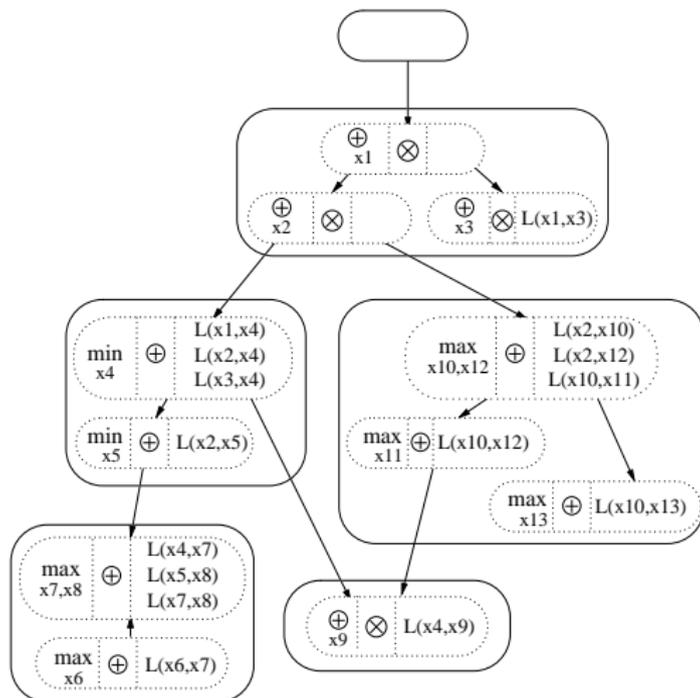
Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion



# Structuration plus fine

Utilisation de techniques de **décomposition en arbre**



Introduction

Exemple

Le cadre PFU

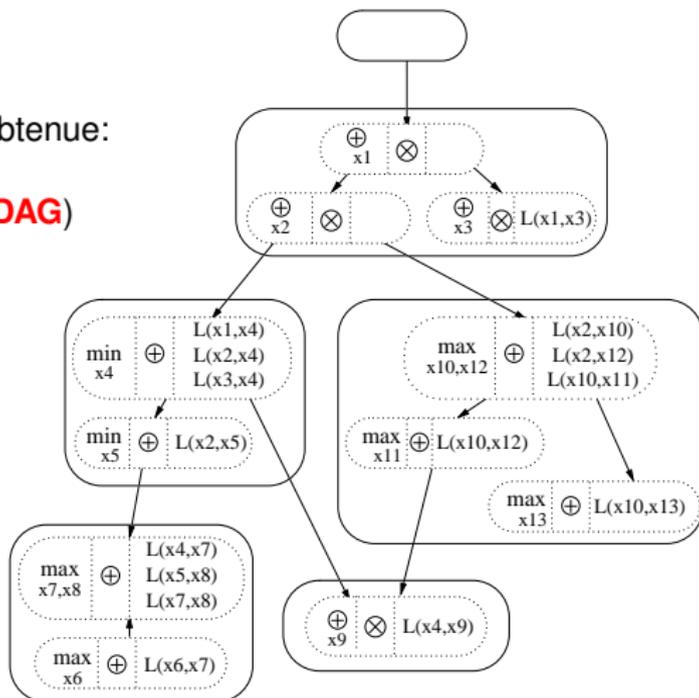
Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

# Structuration plus fine

Utilisation de techniques de **décomposition en arbre**

Architecture de calcul obtenue:  
**MCDAG**  
(**M**ulti-operator **C**luster **D**AG)



Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

## Théorème

La structuration **ne change pas ou fait diminuer** la largeur induite.  
Elle peut générer des gains exponentiels de complexité théorique.

# Recherche arborescente sur un MCDAG

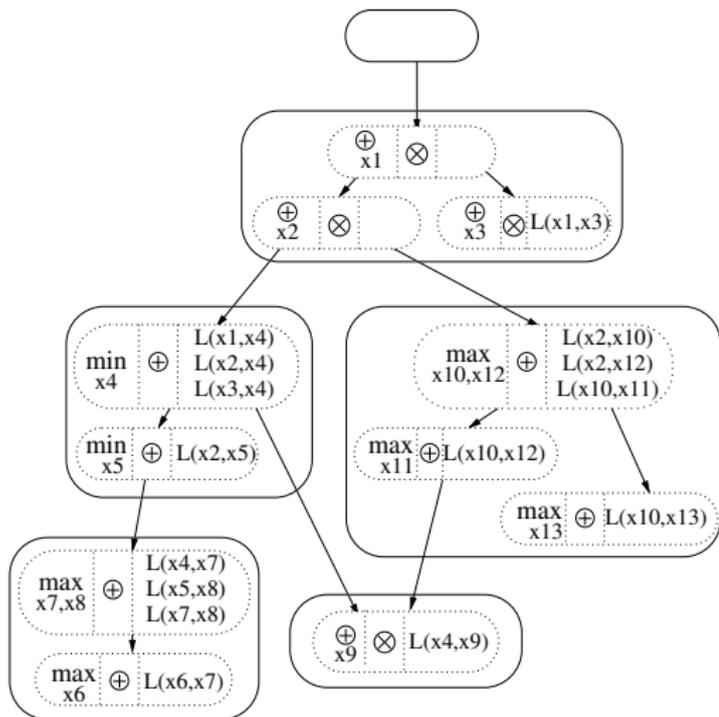
Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

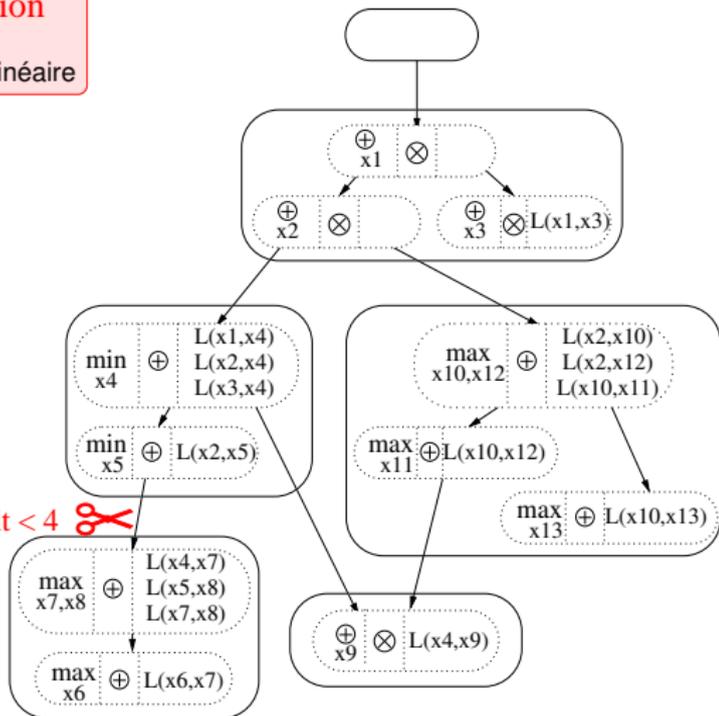
Conclusion



# Recherche arborescente sur un MCDAG



Bornes et propagation  
de contraintes  
temps  $O(d^h)$ , espace linéaire



Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion



- **PFU** = cadre **générique** et **flexible** pour la décision séquentielle

Structure algébrique **plus complexe que celle des VCSP**, mais **gain en “pouvoir couvrant”**

- **Algorithmes génériques**

**Moins matures** que ceux des VCSP  
(*ex: propagation de contraintes*)

VCSP et PFU dans la même veine: **féderer** des **résultats théoriques** et des **développements algorithmiques**

# Quelques références...

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

N. Friedman, J.Y. Halpern. *Plausibility Measures: A User's Guide* - UAI, 1995.

F.C. Chu, J.Y. Halpern. *Great Expectations. Part I: On the Customizability of Generalized Expected Utility* - IJCAI, 2003.

J.Y. Halpern. *Reasoning about Uncertainty* - MIT Press, 2003.

D. Dubois, H. Prade. *Possibility Theory as a Basis for Qualitative Decision Theory* - IJCAI, 1995.

J. Pearl. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference* - Morgan Kaufmann, 1988.

T. Schiex, H. Fargier, G. Verfaillie. *Valued Constraint Satisfaction Problems : Hard and Easy Problems* - IJCAI, 1995.

L. Bordeaux, E. Monfroy. *Beyond NP: Arc-consistency for Quantified Constraints* - CP, 2002.

H. Fargier, J. Lang, T. Schiex. *Mixed Constraint Satisfaction: a Framework for Decision Problems under Incomplete Knowledge* - AAAI, 1996.

# Quelques références...

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

T. Walsh. *Stochastic Constraint Programming* - ECAI, 2002.

M. Littman, S. Majercik, T. Pitassi. *Stochastic Boolean Satisfiability* - Journal of Automated Reasoning, 2001.

R. Howard, J. Matheson. *Influence Diagrams* - Readings on the Principles and Applications of Decision Analysis, 1984.

M. Puterman. *Markov Decision Processes, Discrete Stochastic Dynamic Programming* - John Wiley & Sons, 1994.

R. Sabbadin. *A Possibilistic Model for Qualitative Sequential Decision Problems under Uncertainty in Partially Observable Environments* - UAI, 1999.

C. Boutilier, T. Dean, S. Hanks. *Decision-Theoretic Planning: Structural Assumptions and Computational Leverage* - JAIR, 1999.

P.P. Shenoy. *Valuation Network Representation and Solution of Asymmetric Decision Problems* - European Journal of Operational Research, 2000.

# Quelques références...

Introduction

Exemple

Le cadre PFU

Algorithmes  
génériques sur  
le cadre PFU

Conclusion

P.P. Shenoy. *Valuation-based Systems for Discrete Optimization* - UAI, 1991.

U. Bertelé, F. Brioschi. *Nonserial Dynamic Programming* - Academic Press, 1972.

R. Dechter. *Bucket Elimination: a Unifying Framework for Reasoning* - Artificial Intelligence, 1999.

J. Kolhas. *Information Algebras: Generic Structures for Inference* - Springer, 2003.

C. Pralet, G. Verfaillie, T. Schiex. *An algebraic graphical model for decision with uncertainties, feasibilities, and utilities* - JAIR, à paraître.

C. Pralet, G. Verfaillie, T. Schiex. *Decision with uncertainties, feasibilities and utilities: towards a unified algebraic framework* - ECAI, 2006.

C. Pralet, T. Schiex, G. Verfaillie. *From influence diagrams to multi-operator cluster DAGs* - UAI, 2006

C. Pralet, T. Schiex, G. Verfaillie. *Decomposition of multi-operator queries on semiring-based graphical models* - CP, 2006

C. Pralet, T. Schiex, G. Verfaillie. *Algorithmes et complexités génériques pour différents cadres de décision séquentielle dans l'incertain* - RIA, à paraître.