Représentation de contraintes qualitatives pour le temps et l'espace en SAT

GDR-I3

Jean-François Condotta Dominique D'Almeida
CRIL-CNRS - Université d'Artois - Lens

1 juillet 2007

Sommaire

Définition

Un formalisme qualitatif pour le temps ou l'espace est défini sur :

- un ensemble fini B de relations de base,
- un domaine D.

Les relations de base sont complètes et deux à deux disjointes : tout couple d'éléments de D appartient à exactement une relation de B.

Nous dénoterons par A l'ensemble des parties de B : 2^{B}. L'ensemble $r \in \mathrm{A}$ est appelé *relation*.
Pour $r \in \mathrm{A}$, deux éléments $x, y \in \mathrm{D}$ satisfont r, noté $x\ r\ y$, ssi il existe une relation de base $a \in r$ telle que $(x, y) \in a$.

Définition

L'ensemble A est muni de l'opération unaire inverse $(^{-1})$, et des opérations binaires d'intersection $(\cap)$, d'union $(\cup)$ et de composition $(\circ)$.

La composition $r \circ s$ de $r, s \in$ A est la relation $t = \bigcup_{a \in r, b \in s} \{a \circ b\}$. Intuitivement, $a \circ b$ est l'ensemble de toutes les relations de base possibles entre $x \in$ D et $y \in$ D lorsqu'il existe $z \in$ D avec $(x, z) \in a$ et $(z, y) \in b$.

Exemple

Formalisme d'Allen : l'algèbre des intervalles (AI)

B est composée de 13 relations binaires et D est un ensemble d'intervalle.
Les relations correspondent à un ordre particulier des 4 bornes de deux intervalles.

Relation	Symbole	Inverse	Signification
precedes	b	bi	
meets	m	mi	
overlaps	o	oi	
starts	s	si	
during	d	di	
finishes	f	fi	
equals	eq	eq	

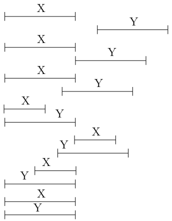


Fig.: Les relations de base de AI

Treillis
Définition

Prérequis à la définition de cette traduction : existence d'un ordre partiel $\preceq$ sur B devant satisfaire certaines propriétés.

$(B, \preceq)$ doit être un treillis, ainsi pour tout $a, b, c \in$ B nous avons :

- $a \ \preceq \ a$,
- si $a \ \preceq \ c$ et $c \ \preceq \ b$ alors $a \ \preceq \ b$,
- si $a \ \preceq \ b$ et $b \ \preceq \ a$ alors $a = b$,
- il existe deux éléments de B correspondant à $\mathrm{Inf}\{a, b\}$ et $\mathrm{Sup}\{a, b\}$.

Treillis

Exemple pour AI

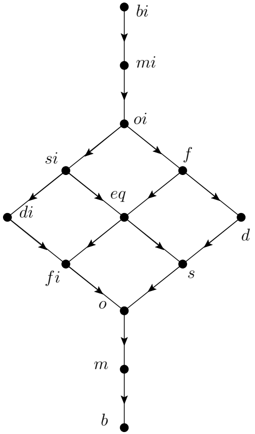


Fig.: Le treillis conceptuel (B, $\preceq$) de AI

Exemple :

- $\{o, fi, s, eq, f\} \notin \mathcal{C}_{\preceq}$;
- $\{o, fi, s, eq\} = [o, eq] \in \mathcal{C}_{\preceq}$.
- $\{f\} = [f, f] \in \mathcal{C}_{\preceq}$.

Réseaux de contraintes qualitatives

Définition

Soit un formalisme F défini sur l'ensemble de relations de base B et le domaine D. Un réseau de contraintes qualitatives, noté RCQ, construit sur F est défini par un couple $\mathcal{N} = (V, C)$ tel que :

- V est un ensemble fini de variables défini sur D,
- C est une application qui, pour tout couple $(v_i, v_j) \in V \times V$, associe un ensemble $C(v_i, v_j) \subseteq$ B. Nous notons C_{ij} la contrainte sur les variables v_i et v_j.

Dans la suite, nous appelons simple RCQ, SRCQ en abrégé, tout RCQ $= (V, C)$ dont chaque contrainte C_{ij} est définie par une relation $[C_{ij}^-, C_{ij}^+]$ de $\mathcal{C}_{\preceq}$.

Réseaux de contraintes qualitatives

Exemple

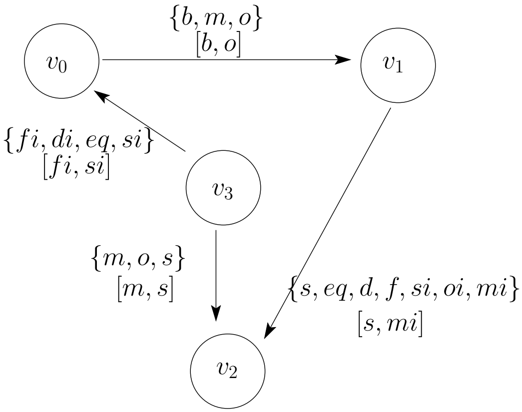


Fig.: Un SRCQ cohérent

Réseaux de contraintes qualitatives

Définition

Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ, avec $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$.

- Une *solution* de $\mathcal{N}$ est une application σ de V vers D telle que $\sigma(v_i) \;\; C(v_i, v_j) \;\; \sigma(v_j)$, pour tout $v_i, v_j \in V$. $\mathcal{N}$ est *cohérent* si et seulement si il admet une solution.
- $\mathcal{N}$ est $\circ$-*fermé* si et seulement si pour tout $v_k, v_i, v_j \in V$, $C(v_i, v_j) \subseteq C(v_i, v_k) \circ C(v_k, v_j)$ et $C(v_i, v_j) \neq \emptyset$ (remarquons que nous pouvons nous restreindre aux triplets $v_k, v_i, v_j \in V$ avec $i < j$).
- Un *scénario* de $\mathcal{N}$ est un *sous*-RCQ (V, C') de $\mathcal{N}$ tel que $C'(v_i, v_j) = \{a\}$ avec $a \in$ B. Un *scénario cohérent* de $\mathcal{N}$ est un scénario de $\mathcal{N}$ admettant une solution.

Encodage vers une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive.

Ensemble des variables propositionnelles : pour tout $a \in \mathrm{B}$ et pour tout $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}\}$

$$\{C_{ij} \preceq a \ , \ a \preceq C_{ij}\}$$

Les clauses doivent retranscrire :

- les contraintes du RCQ ;
- l'algèbre utilisée (structure du treillis, table de composition, ...).

Concernant $(\mathrm{B}, \preceq)$ nous posons deux nouvelles propriétés concernant les opérations d'inverse et de faible composition :

- $\forall a, b \in \mathrm{B}$, si $a \ \preceq \ b$ alors $b^{-1} \ \preceq \ a^{-1}$;
- $\forall a, b, c, d \in \mathrm{B}$, $[a, b] \circ [c, d] = [\mathrm{Inf}(a \circ c), \mathrm{Sup}(b \circ d)]$.

Traduction en SAT

Définition des clauses (I)

Représentation des bornes sur les contraintes du réseau :

- Pour chaque contrainte $C_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$ avec $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$a_{ij} \preceq C_{ij} \text{ et } C_{ij} \preceq b_{ij} \quad (I)$$

Exemple pour AI :

$$C_{05} = [b, o] \longrightarrow b \preceq C_{ij} \wedge C_{ij} \preceq o$$

Traduction en SAT

Définition des clauses (II)

Modélisation des infimums et des supremums de $\preceq$:

- pour tout $a, b \in \mathrm{B}$:

$$\neg(a \preceq C_{ij}) \vee \neg(b \preceq C_{ij}) \vee \mathrm{Sup}\{a, b\} \preceq C_{ij} \quad (II\ \ a)$$

$$\neg(C_{ij} \preceq a) \vee \neg(C_{ij} \preceq b) \vee C_{ij} \preceq \mathrm{Inf}\{a, b\} \quad (II\ \ b)$$

Exemple pour AI :

$$\neg(eq \preceq C_{ij}) \vee \neg(d \preceq C_{ij}) \vee (f \preceq C_{ij}) \quad (Sup)$$

$$\neg(C_{ij} \preceq eq) \vee \neg(C_{ij} \preceq d) \vee (C_{ij} \preceq f) \quad (Inf)$$

Traduction en SAT

Définition des clauses (III)

Description de la propriété de transitivité :

- pour tout $a, b \in \mathrm{B}$ tels que $a \not\preceq b$:

$$\neg(a \preceq C_{ij}) \vee \neg(C_{ij} \preceq b) \quad (III)$$

Exemple pour AI :

$$m \not\preceq b \longrightarrow \neg(C_{ij} \preceq b) \vee \neg(m \preceq C_{ij})$$

Traduction en SAT

Définition des clauses (IV)

Représentation de l'opération inverse :

- pour tout $a \in \mathrm{B}$:

$$\neg(a \preceq C_{ij}) \vee C_{ji} \preceq a^{-1}$$

$$\neg(C_{ij} \preceq a) \vee a^{-1} \preceq C_{ji} \quad (IV)$$

Exemple pour AI :

$$b = bi^{-1} \longrightarrow \neg(b \preceq C_{ij}) \vee (C_{ij} \preceq bi)$$

Traduction en SAT

Définition des clauses (V)

Modélisation de l'opération de faible composition :

- Pour chaque triplet de contraintes (C_{ik}, C_{kj}, C_{ij}), avec $i, j, k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $i < j$

$$\neg(a \preceq C_{ik}) \vee \neg(b \preceq C_{kj}) \vee \mathrm{Inf}(a \circ b) \preceq C_{ij} \quad (Va)$$

$$\neg(C_{ik} \preceq a) \vee \neg(C_{kj} \preceq b) \vee C_{ij} \preceq \mathrm{Sup}(a \circ b) \quad (Vb)$$

Exemple pour AI :

$$b \circ bi = \mathrm{B} \longrightarrow \neg(b \preceq C_{ik}) \vee \neg(bi \preceq C_{kj}) \vee (b \preceq C_{ij})$$

$$b \circ bi = \mathrm{B} \longrightarrow \neg(C_{ik} \preceq b) \vee \neg(C_{kj} \preceq bi) \vee (C_{ij} \preceq bi)$$

Traduction en SAT

Cadre général

Traduction d'un SRCQ : ne contient que des clauses de Horn.

C_{ij} n'est pas toujours une relation de $\mathcal{C}_{\preceq}$.

- Découper C_{ij} en $C_{ij} = \bigcup_{x=1}^{k} [a_{ij}^x, \ldots, b_{ij}^x]$
- Replacer la définition des clauses (I) par :

$$\bigvee_{x=1}^{k} (a_{ij}^x \preceq C_{ij} \wedge C_{ij} \preceq b_{ij}^x)$$

Exemple :

$$\{o, fi, s, eq, f\} = [o, eq] \cup [f, f]$$
$$(o \preceq C_{ij} \wedge C_{ij} \preceq eq) \vee (f \preceq C_{ij} \wedge C_{ij} \preceq f)$$

Complétude

- Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un SRCQ défini sur $(\mathrm{B}, \preceq)$. Si $\mathcal{N}$ admet un scénario $\circ$-fermé alors $\mathrm{Sat}(\mathcal{N})$ est satisfiable.
- Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un SRCQ. Si la méthode de la fermeture par faible composition est complète pour les SRCQ alors $\mathcal{N}$ est cohérent ssi $\mathrm{Sat}(\mathcal{N})$ est satisfiable.
- Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ. Si la méthode de la fermeture par faible composition est complète pour les SRCQ alors $\mathcal{N}$ est cohérent ssi $\mathrm{Sat}(\mathcal{N})$ est satisfiable.

Definition (Support encoding)

Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un RCQ tel que $V = \{v_0, ..., v_{n-1}\}$. $\mathrm{Sat}_S(\mathcal{N})$ est l'ensemble de clauses défini sur l'ensemble de propositions $\{r_{ij}$ avec $a \in \mathrm{B}, i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $i < j\}$ par :

1. pour tout $1 \leq i < j \leq n$, la clause $\bigvee_{a \in C_{ij}} a_{ij}$ est introduite (ALO),
2. pour tout $1 \leq i < j \leq n$ et pour tout $a, b \in C_{ij}$, si $a \neq b$, la clause $\neg a_{ij} \vee \neg b_{ij}$ est introduite (AMO)
3. pour tout $1 \leq i < k < j \leq n$, pour tout $a \in C_{ik}$, $b \in C_{kj}$, la clause $\neg a_{ik} \vee \neg b_{kj} \vee \bigvee_{c \in (a \circ b) \cap C_{ij}} c$, est introduite (Support).

Comparaison

Espace

Traduction de RCQ de 50 variables sur l'algèbre des intervalles.

Utilisant les relations convexes :

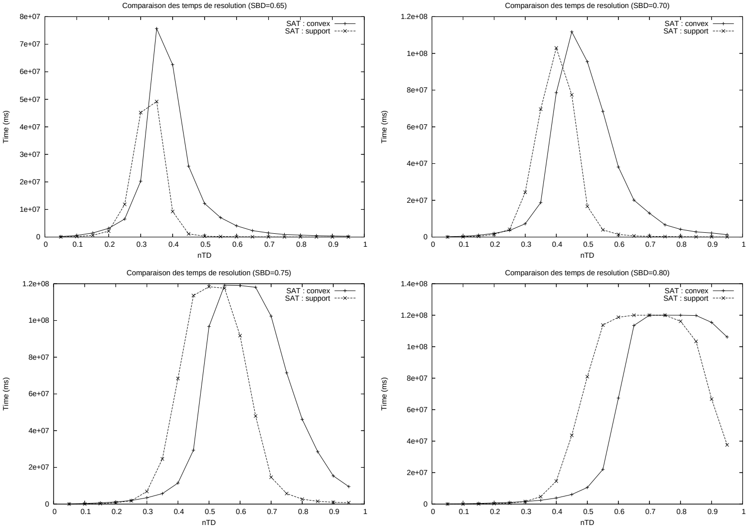
- Sans réduction : env. 20 millions de clauses
- Avec réduction : env. 5 millions de clauses (soit 75% de la formule)

Utilisant la notion de support de la table de composition :

- Sans réduction : 3.5 millions de clauses
- Avec réduction : entre 1.5 et 3 millions de clauses.

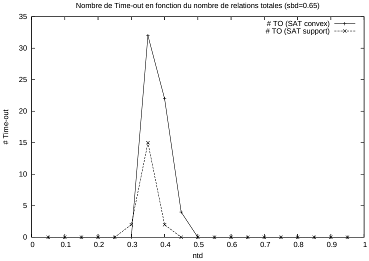
Comparaison

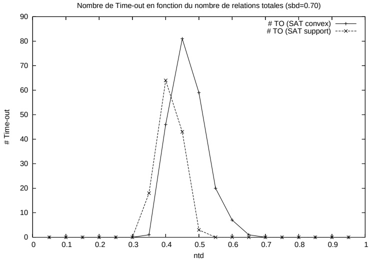
Temps

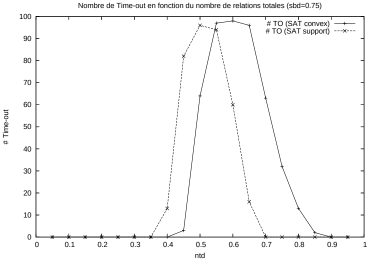


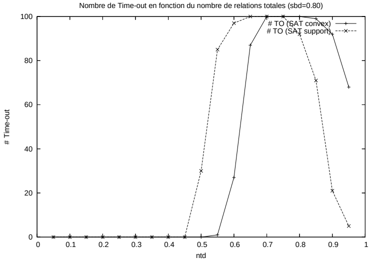
Comparaison

Time-out









Conclusion et perspectives

Conclusion :

- encodage d'un RCQ en une formule propositionnelle utilisant les relations convexes,
- complétude de la méthode,
- résultats expérimentaux intéressant.

Perspectives :

- réduction du nombre de clauses en limitant leur portée,
- ajout de nouveaux axiomes pour faciliter la recherche,
- utiliser d'autres relations comme les pre-convexes,
- méthode hybride avec celle existante pour améliorer les résultats.

Merci de votre attention